Die Grundrechenoperationen im Mathematikunterricht aus historischer Sicht [1]

Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Math.-Naturwiss. Reihe 38(1989)2, S. 106-111

Ingmar Lehmann

Als Motto seien zwei Zitate vorangestellt:

"Es ist in einem Fach wie der Mathematik besonders notwendig, nicht bloß die Ergebnisse der Forschung und ihren heutigen Stand, sondern auch deren geschichtliche Entwicklung zu kennen. Gerade die Entwicklung z.B. der Grundbegriffe ... gibt besonders viele und fruchtbare Fingerzeige für die methodische und didaktische Behandlung" [4, S. 29] und

"Unerschöpflich kann man so aus der Historie für die didaktische Methode lernen" [24, S. 95] .

Van der Waerden [28, S. 53] will das nicht nur auf den Unterricht an den Universitäten eingeschränkt wissen, sondern "auch für den Schulunterricht" angewendet sehen.

Die vier Grundrechenoperationen *Addition*, *Subtraktion*, *Multiplikation* und *Division* kommen schon in den ältesten mathematischen Dokumenten, den ägyptischen Papyri und den mesopotamischen Tontäfelchen, vor. Selbst für das *Potenzieren* und *Radizieren* hatten die Babylonier bereits Tabellen. Dennoch begnügte man sich noch im Mittelalter über Jahrhunderte hinweg an den Klosterschulen, Domschulen und Universitäten mit einem Minimum an arithmetischen Kenntnissen.

Das im folgenden gezeichnete Bild stützt sich wesentlich auf solche Standardquellen zur Geschichte der Mathematik wie z.B. die Werke von Cantor [3], Tropfke [25, 26] sowie Wußing [30] ,ohne daß dies an den entsprechenden Stellen immer explizit hervorgehoben wird.

Das im Mittelalter vermittelte Wissen über die vier Grundrechenarten wurde in Form von Regeln weitergegeben. Definitionen und Beweise fehlten. Auf die unterschiedlichen Rechen*verfahren*, die im Laufe der Zeit für die einzelnen Grundrechenoperationen entwickelt worden sind, soll im folgenden nicht eingegangen werden.

Die Arithmetik war (neben Geometrie, Astronomie und Musik) Bestandteil des Quadriviums. Vor Beginn des Arithmetikunterrichtes hatten die Schüler jedoch erst das Trivium (Grammatik, Dialektik, Rhetorik) zu absolvieren, das sich über einen Zeitraum von 5 bis 9 Jahren erstreckte. Wußing [30, S. 111] schätzt ein: "Das Niveau der mathematisch-naturwissenschaftlichen Ausbildung war fast durchweg bescheiden. Das elementare Rechnen mit den vier Grundrechenarten umfaßte die ganzen positiven Zahlen; aber schon die (nicht aufgehende) Division bot oft genug unüberbrückbare Schwierigkeiten; man 'geriet in die Brüche'. "

Im Jahre 1202 hat Leonardo (Fibonacci) von Pisa (1170?-1250?) mit seinem Werk "Liber ab(b)aci" fast das gesamte arithmetische und algebraische Wissen jener Zeit zusammengefaßt.

---

[1] Dieser Beitrag ist aus der Dissertation B "Zum Arbeiten mit binären Operationen aus schulmathematischer Sicht" (Berlin, 26.5.1988) des Verfassers hervorgegangen. Für wertvolle Anregungen danke ich den Herren Prof. Dr. K. Härtig, Prof. Dr. D. Ilse und Prof. Dr. H. Wußing.

Insbesondere trug dieses 1228 überarbeitete "Buch vom Abakus" wesentlich zur Verbreitung der indisch-arabischen Ziffern und der (indischen) dezimalen Rechenverfahren in Europa bei. Neben dem Operieren mit ganzen Zahlen lehrt Leonardo auch das Rechnen mit gemischten Zahlen und Brüchen. In diesem Zusammenhang tritt erstmals der Bruchstrich (bei gewöhnlichen Brüchen) auf. Allerdings hat dieses Werk, das sich - wie auch die nachfolgenden Rechenbücher - auch auf arabische Quellen stützt, erst spätere Generationen maßgeblich beeinflußt. Weit größere Verbreitung besaßen im 13. Jh. die Schriften des Jordanus Nemorarius (? -1237) und des Johannes de Sacrobosco (? -1256?). Letzterer lehrt in seiner "Abhandlung über die Kunst des Rechnens" (Tractatus de arte numerandi) neun Rechenarten (!):

1. Numeratio,
2. Additio,
3. Subtractio,
4. Duplatio,
5. Multiplicatio,
6. Mediatio,
7. Divisio,
8. Progressio,
9. Radicum extractio.

In der "Numeratio" wurde das Zählen, Lesen und Schreiben der Zahlen gelehrt. Die "Progressio" hat hier nur die Behandlung einiger einfacher Folgen zum Inhalt; später berücksichtigt sie auch die geometrischen Folgen 1, 2, 4, 8, ... und 1, 3, 9, 27, ... Die Rechenart "Radicum extractio" beschränkte sich im allgemeinen auf das Ausziehen der Quadratwurzel. Obwohl "Duplatio" und "Mediatio" Spezialfälle der Multiplikation bzw. Division sind, werden sie (wie schon in den ältesten Dokumenten) als selbständige Rechenarten geführt. Es ist auch interessant zu beobachten, daß dieses *Verdoppeln* und *Halbieren* dann noch über viele Jahrhunderte als eigenständige Rechenoperationen beibehalten werden.

Das Lehrbuch des Sacrobosco, das im Gegensatz zu Leonardos "Liber abaci" nur das Rechnen mit ganzen Zahlen lehrt, "ist eine Sammlung von Regeln ohne den geringsten Beweis, ohne Zahlenbeispiel, ohne Erwähnung einer Quelle, aus welcher der Verfasser schöpfte. Aber in dieser Nüchternheit, in dieser Kürze eignete es sich vortrefflich dazu, den Grundriss zu einem die zahlreichen Lücken mündlich ergänzenden Unterrichte zu bilden, und wurde es Jahrhunderte lang in solcher Weise benutzt" [3, S. 81]. Daß solche Lehrbücher keine Quellen zitieren, war im übrigen noch bis in das 19. Jh. hinein üblich.

Da die Ausbildung im Rahmen des Quadriviums sich wenig um die mathematischen Bedürfnisse der Praxis (Handel, Finanzwesen, Navigation, Ballistik, Festungsbau) kümmerte, entstanden - neben den bereits seit dem 13. Jh. ins Leben gerufenen Rats- und Stadtschulen, im allgemeinen Lateinschulen genannt; an denen aber in der Regel keinerlei Mathematik gelehrt wurde - im 15. Jh. die ersten Rechenschulen in Deutschland. "Auf allen diesen Schulen, welcher Art sie angehörten, kann der Rechenunterricht nicht elementar genug gedacht werden. Kaum irgendwo wird er das Rechnen mit ganzen Zahlen überschritten haben ..." [3, S. 159]. Aber selbst an den Universitäten, wo zwar Mathematik über das Rechnen hinaus gelehrt wurde, hatte das elementare Rechnen ebenfalls nur mäßiges Niveau. Der Lehrstoff wurde oft in sogenannten Rechenbüchern dargestellt. Eines dieser ersten gedruckten Lehrbücher hat den Titel "Behēde vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmannschafft" (Leipzig,1489) und stammt von Johannes Widman(n) (1460?-1498?).

Über die mathematischen Schriften jener Zeit fällt Hankel [12, S. 352] zwar ein ziemlich vernichtendes Urteil: "Verworrenheit, Unklarheit und Dunkelheit sind in mathematischen Abhandlungen niemals herrschender gewesen, als eben damals, wo jeder Gelehrte so gründlich in den feinsten Distinctionen der Dialektik geübt war ...", aufgrund neuerer Forschungsergebnisse kann diese generelle Einschätzung Hankels jedoch nicht mehr aufrechterhalten werden. So war z.B. die Algebra im 15. Jh. in Italien hochentwickelt (H. Wußing).

Während Widmann weiterhin am Verdoppeln und Halbieren als besonderen Rechenarten festhält, verwirft Luca Pacioli (1445?-1514) in seiner "Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita" (Venedig, 1494) beide ausdrücklich als selbständige Rechenarten. "Man sollte nicht als ein Geringes verachten, dass er es war, der die Halbierung und Verdopplung verdammte und verbannte" [3, S. 309]. Pacioli knüpfte damit wieder an Leonardo von Pisa an, in dessen "Liber abaci" (1202) es weder eine Duplatio noch eine Mediatio gegeben hatte. Nichtsdestoweniger gab es auch fernerhin Versuche, Duplatio und Mediatio als Rechenarten beizubehalten. So enthält das Rechenbuch "Elementa Arithmetices, Algorithmus de numeris integris..." (1492, 1536) des Georg von Peurbach (1423-1461), der immerhin als Bahnbrecher für die Aufnahme der mathematischen Studien in Deutschland gilt, wieder die 9 Rechenarten wie bei Sacrobosco. Zum Teil wird jede Operation nur durch ein einziges Beispiel illustriert. Das Buch liefert ausschließlich Regeln. Beweise fehlen völlig; ein Beweisbedürfnis hat sich hier - im Gegensatz zur Geometrie - erst sehr spät entwickelt. Über ganzzahliges Rechnen wird nicht hinausgegangen. Die "Elementa ..." sind dennoch auf lange Zeit das entscheidende Lehrbuch an den Universitäten.

Von Heinrich Schreyber, genannt Grammateus (1496?-1525), stammt das erste Rechenbuch in deutscher Sprache, das weder das Halbieren noch das Verdoppeln als selbständige Rechenoperationen lehrt ("Ayn new kunstlich Buech welches gar gewiss und behend lernet ..."; geschrieben 1518, gedruckt 1523). Grammateus wirft beide bewußt über Bord. Allmählich reduzierten sich also die Grundrechenarten oder "species" auf die folgenden sechs, die schon von den Indern gelehrt wurden:

- Addition und Subtraktion als Rechenarten 1.Stufe,
- Multiplikation und Division als Rechenarten 2.Stufe,
- Potenzierung und Radizierung als Rechenarten 3.Stufe.

Diese Einteilung nimmt erstmalig John Napier oder Neper (1550-1617) vor ("Ars logistica"; etwa 1594 verfaßt, aber erst 1839 gedruckt). Dabei blieben aber diese sechs "species" noch sehr lange auf das Rechnen mit ganzen Zahlen beschränkt. "Noch im 17. Jh. war die Bruchrechnung an Universitäten ein Stoffgebiet, das nur mit allergrößter Mühe gemeistert werden konnte" [30, S. 128], obwohl mit der "Arithmétique" (1585) von Simon Stevin (1548-1620?) eine vorbildliche Darstellung der Bruchrechnung vorlag. Stevin gilt allgemein als Begründer der Lehre von den Dezimalbrüchen.

Die Logarithmen wurden zwar schon im 17.Jh. ein wichtiges Rechenhilfsmittel - Joost Bürgi (1552-1632), Napier, Henry Briggs (1561-1630), Johannes Kepler (1571-1630) -, Eingang in die Schulen haben sie aber erst sehr spät gefunden. "Die Definition des Logarithmus als Potenzexponent kam erst im 18.Jh. auf. Die Auffassung, daß das *Logarithmieren* neben dem Radizieren eine zweite Umkehrung des Potenzierens darstellt, wurde schließlich erst von

Leonhard Euler (1707-1783) herausgearbeitet" [30, S. 131]. In den deutschen Schulen (Gymnasien) drang diese Auffassung erst im vorigen Jh. durch [17, S. 28].

Es wurde schon erwähnt, daß z.B. im Lehrbuch des Sacrobosco aus dem 13. Jh. zwar Regeln für das Rechnen vermittelt werden, nach denen die betreffenden Aufgaben rein mechanisch zu lösen waren, auf Beweise aber gänzlich verzichtet wird. "Die Unterrichtsweise war rein dogmatisch und bestand, gleich der leiblichen Gymnastik, nur aus dem Vorthun und Nachthun.

'Machs nach der Regel wie hie und kumpt recht',

drückt die ganze didaktische Weisheit der damaligen Rechenmeister aus" [27, S. 111]. Im schon genannten Rechenbuch von Widmann heißt es 1489 noch fast gleichlautend:

"Machß nach der Regel so kumpt das facit."

Allerdings beklagt schon im Jahre 1525 Michael Stifel (1487?-1567), der aus der Schar der deutschen Rechenmeister und Cossisten herausragt, in der Vorrede zur 2. Auflage der Coss von Christoff Rudolff (1500?-1545?): "... und das beste (wie der flucher sagt) hatte verschwigen, nemlich die Demonstrationes seyner Regeln" [3, S. 390]. Dennoch wurde weiterhin nach der mechanischen Methode unterrichtet.

Das Jahr 1525 muß an dieser Stelle noch aus einem weiteren Grund erwähnt werden. Mit diesem Jahr beginnt der erste - urkundlich nachweisbare - Mathematikunterricht an einer deutschen Mittelschule [10, S. II].
An den Elementarschulen, deren Besuch erst im 17. Jh. nach und nach obligatorisch wurde [8, S. 109], in Preußen zu Beginn des 18.Jh. (Einführung der Schulpflicht 1717 bzw. 1719), blieb man in bezug auf das Rechnen in einem sehr bescheidenen Rahmen. "Bis ins 17. Jh. hinein betonte der Rechenunterricht fast ausschließlich praktische Zwecke. Dem Schüler wurde beigebracht, wie er rechnen müßte... Warum so gerechnet wurde, das blieb unbeantwortet" [16, S. 9]. Der Bericht des Schreib- und Rechenmeisters J.A.Menzzer, der seit 1738 am Darmstädter Pädagogium wöchentlich zwei bis drei Stunden im Rechnen und Schreiben unterrichtete, schildert auf seine Art recht eindrucksvoll, wie es wohl um die Beherrschung der vier Grundrechenarten bestellt gewesen sein muß: "Bei der Instruktion setzt sich keiner nieder, stehen alle um mich herum, teils verhindern den Elaborierenden durch allerhand Narren- und Bubenpossen, teils gehen an die andere Tafel und rechnen nach ihrem Kopf, keiner aber hat Papier oder Feder und Tinte und wollen auch das Einmaleins nicht recht lernen, und dabei sind sie so unartig, daß einer bald addieren, der andere subtrahieren, der 3te und 4te multiplizieren und dividieren will und keiner will weiter, sondern wenn's Exempel nur dastehet, so schleicht immer einer nach dem andern wieder fort; des oftmaligen Tumults, Tratschens in der Stube herum ... zu geschweigen, und so lange diese Unordnung bleiben wird, daß sie sich nicht setzen und die Rechnungsarten ordentlich aufschreiben ..., so ist es ja un- möglich, daß sie viel profitieren können" [9, S. 44]. Daß der Rektor jener Schule die Disziplin verbessern konnte, ist überliefert. Ob aber aufgrund seiner monatlichen Visite auch die Leistungen in Arithmetik angehoben werden konnten, wissen wir nicht.

Rechen-und Lehrbücher aus dem 18.Jh. bezeugen jedoch, daß es sich an den höheren Schulen durchzusetzen begann, die zu vermittelnden Rechenregeln jetzt auch zu beweisen. Auch wenn diese Beweise nach heutigen Maßstäben nicht immer korrekt waren (und es z.T. auch noch gar nicht sein konnten), war man einen wesentlichen Schritt vorangekommen. Als Beispiel sei das damals weit verbreitete Handbuch "Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften" (Halle, 1710) von Christian Wolff (1679-1754), der mit diesem Buch zugleich den Beweis antrat, daß sich die deutsche Sprache sehr wohl zur Behandlung wissenschaftlicher Themen eignet, genannt: "Es ist nicht genug, daß der Lehrer die Wahrheit sage, sondern die Schüler müssen auch begreifen, daß es Wahrheit sei... Man muß nicht allein in der Erklärung der Rechenkunst die Regeln zeigen, nach welchen man die verlangten Zahlen finden kann, sondern man muß auch deutlich begreifen, warum durch selbige Regeln die verlangten Zahlen können gefunden werden" [3; 1930, S. 80].

Die "Anfangsgründe ..." bzw. der für Anfänger verfaßte "Auszug aus den Anfangsgründen ..." (1713) von Wolff haben die Gestaltung des mathematischen Unterrichts der Gymnasien wesentlich beeinflußt, insbesondere haben sie entscheidend zur Verbreitung der Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ beigetragen.

Die Anfänge einer beweisführenden Lehrmethode fielen in dieselbe Zeit, in der die ersten Realschulen (1739, 1747) und Lehrerseminare (18.Jh.) entstanden. Die Hoch-Zeit der spätmittelalterlichen Rechenschulen war vorbei.

Trotz des Wirkens solcher fortschrittlicher Pädagogen wie z.B. Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827) und Adolph Diesterweg (1790-1866) für eine Reform des Rechenunterrichts an den niederen Schulen wurde das alleinige Auswendiglernen der Rechenregeln nur ganz allmählich zurückgedrängt. Wie sehr z.B. Diesterweg um die Nöte der Beherrschung der vier Grundrechenarten wußte, zeigt das folgende Zitat: "Ein Kind zum bewußtlosen Rechnen, zum Spiel mit toten Ziffern abrichten, heißt es entmenschlichen, seinen Geist fesseln und töten. Es ist intellektueller Totschlag" [13, S. 41].

Auch die "Rechenkunst in zween Theilen" von J. Schmid (1774) und F. Dinters "Vorzügliche Regeln der Pädagogik, Methodik und Schulmeisterklugheit" (1806) sagen der mechanischen Methode entschieden den Kampf an. Schmid schreibt: "Der Beweis deckt den Grund eines Verfahrens auf und man lernt durch ihn das Erwiesene recht verstehen"; in gleicher Weise argumentiert auch Dinter: "Das Kind muß nichts rechnen, von dem es nicht den Grund einsieht. Der vollkommenste Mechanismus erreicht nur zur Hälfte den Zweck" [13, S. 43, 52].

An den Volksschulen (so wurden die Elementarschulen seit 1820 genannt), insbesondere auf dem Lande, war es dennoch bis weit ins 19.Jh. hinein üblich, die Schüler die entsprechenden Regeln auswendig lernen zu lassen. "In vielen Landschulen stand das Rechnen gar nicht im Stundenverzeichnis..." [13, S. 39]. Hinzu kam, daß durch die Stielschen Regulative von 1854 der Mathematikunterricht der Volksschule von den Entwicklungen in den höheren Schulen (wie z.B. der Erziehung zur Selbständigkeit) im wesentlichen ausgeschlossen blieb. An eine mathematische Ausbildung war, insbesondere durch das dritte Regulativ, dabei überhaupt nicht zu denken. "Die Präparanden- und Seminarbildung sollte dem Lehrer den für den Unterricht in der Elementarschule (einklassige Volksschule) nötigen Wissensstoff und die Methode des Elementarunterrichts in Verbindung damit beibringen und jeden Versuch einer wissenschaftlichen Bildung vermeiden..." [22, S. 767].

Der Schriftsteller und Pfarrer Jeremias Gotthelf (1797-1854) schildert uns in seiner Geschichte "Leiden und Freuden eines Schulmeisters" [5, S. 68], wie es um die Beherrschung der Grundrechenarten stand: "... Noch schlimmer ging es beim Dividieren... Und das alles ging darum so mühselig und langsam zu, weil auch nicht für das geringste ein Grund angegeben war, weil man nie wußte, warum man es so machen müsse und nicht anders. Und eben deswegen vergaß man alles alsobald wieder."

Während das Beweisen der Regeln also erst relativ spät einsetzte, tritt die Probe bei der Multiplikation und Division bereits in den ersten Rechenbüchern auf. Zur Überprüfung des Multiplikationsergebnisses wird von vielen Autoren, z.B. auch von Adam Ries(e) (1492-1559), dem wohl bekanntesten deutschen Rechenmeister, die Neunerprobe behandelt. Bei Jakob Köbel (1470-1533) heißt es in seinem 1520 neu aufgelegten Rechenbuch:

> "Die Prob ist ein zweyfel gewyß machen."

Denen, die den Wert der Neunerprobe in Zweifel zogen, wurde "der größeren Gewißheit wegen eine Proberechnung durch die entgegengesetzte Species" empfohlen. Unger [27, S. 83] gibt eine plausible Erklärung für das teilweise Festhalten an der Probe: "Das Anstellen der Probe war weniger ein spezielles Bedürfnis jener Zeit als vielmehr eine historische Überlieferung. Weil die Inder und Araber auf der Sandtafel rechneten und auf diesem Apparate alle Ziffern der Zwischenrechnung verschwanden, so konnte man sich nicht auf dem Wege der nochmaligen Durchrechnung von der Richtigkeit des Resultats überzeugen. Es standen zu diesem Zwecke nur die gegebenen Zahlen und das Facit zur Verfügung."

Trotz der Erklärungen oder auch Beweise, die den Schülern für die einzelnen Rechenregeln in den Lehrbüchern seit dem 18. Jh. gegeben worden sind, war es - aus heutiger Sicht - noch immer sehr mühselig, die "Kunst des Rechnens" zu erlernen. Davon überzeugt man sich, wenn man z.B. ein Lehrbuch für die mittleren Klassen der Gymnasien aus dem Jahre 1848 zur Hand nimmt. Der Schüler wird hierin von der Fülle an Grundsätzen, Zusätzen, Lehrsätzen und Anmerkungen, die sich allein auf die vier Grundrechenarten beziehen, förmlich erdrückt. Die Lehrsätze werden zudem nur verbal formuliert; ein Beispiel [21, S. 25]:
"§. 45. Lehrsatz.

> Wenn sich der Dividend und Divisor um gleiche Factorenver größern oder verkleinern, so bleibt der Quotient derselbe."

Der Lehrer wurde darüber hinaus durch die Vielzahl der Lehrmeinungen und unterschiedlichen Auffassungen eher noch verunsichert. 1880 gab es an den preußischen höheren Lehranstalten 130 verschiedene Mathematikbücher; viele Schulen hatten ihr eigenes Lehrbuchwerk [7, S. 313].

Das 19.Jh. brachte die endgültige und korrekte Verankerung der ganzen Zahlen in der Arithmetik. Das Hauptverdienst gebührt hierbei Hermann Hankel (1839-1873), der in seiner "Theorie der complexen Zahlensysteme..." (Leipzig, 1867) das nach ihm benannte *Permanenzprinzip* formuliert hat. Dieses heuristische Prinzip fordert, daß sich viele als wichtig erachtete Gesetze des alten Zahlbereichs auf den neuen Zahlbereich übertragen. Das bedeutet, "daß die Gesetze der Verknüpfung nicht Eigenschaften der Zahlen sind, sondern daß vielmehr umgekehrt die durch Definition fixierten Verknüpfungsgesetze den entstehenden Zahlenbereich gleichsam schaffen" [30, S. 234]. Das Problem dieses Prinzips besteht allerdings darin, präzisieren zu müssen, welche Eigenschaften als wichtig ("erhaltenswert") anzusehen sind bzw. worauf man verzichten will.

Ebenso ist es auch das Verdienst Hankels, "den abstrakten Begriff der Verknüpfung in vollkommener Klarheit konzipiert und dargestellt" [2, S. 71] zu haben [11, S. 10].

Die Idee von William Rowan Hamilton (1805-1865), Zahlenpaare zur Erzeugung neuer Zahlen einzuführen (1837), hatte sich ebenfalls bald als besonders tragfähig herausgestellt. Geordnete Zahlenpaare treten im übrigen schon 1679 bei Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) auf [15, S.789, wenn auch der Begriff selbst noch fehlt. "Durch die Untersuchungen von Hamilton, die schließlich in seine Studien über Quaternionen und nichtkommutative Verknüpfungen einmündeten, rückten die Verknüpfungsgesetze selbst in den Vordergrund des Interesses" [29, S. 160].

Mit dem Buch von Hankel werden, das nebenbei, die Begriffe "Kommutativität", "Assoziativität" und "Distributivität" in die deutschsprachige Literatur eingeführt. Nach Hankel [11, S. 3] gehen die Namen "Kommutativität" und "Distributivität" auf Francois Joseph Servois (1814) sowie "Assoziativität" auf Hamilton (1843) zurück. Leibniz war in diesem Zusammenhang vielleicht der erste, der weder die Kommutativität der Addition noch die der Multiplikation als selbstverständlich angesehen hat. Als Beispiele nichtkommutativer Operationen führt er die Subtraktion, die Division und das Potenzieren an [14, S. 31].

Die allgemeine Auffassung der drei genannten Rechengesetze findet man zuerst in der "linealen Ausdehnungslehre" (1844) von Hermann Grassmann (1809-1877) ausgesprochen [6, S.35], obwohl bereits rund 20 Jahre früher Martin Ohm (1792-1872), ein Bruder des Physikers G. S. Ohm, diese Eigenschaften für die Addition und Multiplikation herausgestellt hatte [18, S. 12-17] . Ohm gab diesen Rechengesetzen noch keine Namen.

In diesem Zusammenhang sei auch erwähnt, daß Ohm die Mathematik als "vollkommen konsequentes System" (1822) lehren wollte und mit dieser Auffassung großen Einfluß auf die Gestaltung des (gymnasialen) Mathematiklehrplans in Preußen hatte. Das Ohmsche "System" war als "Methode der sukzessiven Zahlbereichserweiterungen" [1, S. 20] zugleich auch Wegbereiter des Hankelschen Permanenzprinzips. So schreibt z.B. Ohm schon in der ersten Hälfte des 19.Jh. [19, S. 24]: "Weil wir aber bemerken, daß die bisher entwickelten Sätze (der Addition und der Subtraktion ganzer Zahlen - Anm. des Verf.) uns nicht mit Eigenschaften einzelner Zahlen, sondern mehr mit den Eigenschaften derjenigen (Verstandes=)Operationen bekannt machen, die wir Addition und Subtraktion nennen - weil sonach die entwickelten Sätze mehr das Verhalten dieser beiden Operationen zu einander aussprechen, so läßt sich schon daher mit Grund erwarten, daß dieses Verhalten der Operationen in denselben Gleichungen ausgesprochen s e y n und b l e i b e n werde, wenn wir uns auch gar nicht mehr darum bekümmern, ob a, b, a – b, u.s.w. (ganze) Zahlen bedeuten oder nicht ..., sondern nur das Verhalten der Operationen zu einander im Auge haben."

Das Hankelsche Permanenzprinzip hatte sich dann bereits gegen Ende des 19.Jh. als eine wichtige Leitlinie des (gymnasialen) Mathematikunterrichts etabliert.

H. Grassmann nannte die Kommutativität, Assoziativität und Distributivität "Vertausch-barkeit", "Vereinbarkeit der Glieder" bzw. "Gesetz über die Beziehung der Multiplikation zur Addition" [6, S. 35]. Bereits 1873 greift Ernst Schröder (1841-1902) die Hankelschen Bezeichnungen auf [23, S. 55, 58, 84]. In einem Schulbuch von 1899 werden diese Gesetze zwar behandelt, die genannten Namen treten jedoch noch nicht auf [20, S. 98ff .].

Schließlich lieferte das 19.Jh. eine strenge Grundlegung des Systems der reellen Zahlen. Entscheidende Etappen hierbei waren die Arbeiten von Karl Weierstraß (1815-1897), Richard

Dedekind (1831-1916) und Georg Cantor (1845-1918), nachdem bereits im 17. Jh. das Problem, ob irrationale Größen zu den Zahlen zu rechnen seien, durch die Arbeiten von René Descartes (1596-1650), Frans van Schooten (1615-1660) u.a. positiv entschieden worden war. Descartes und van Schooten haben das erreicht, indem sie geometrische Konstruktionen den Grundrechenoperationen nachgebildet haben. "Da die Rechenoperationen der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation, der Division und des Quadratwurzelziehens in geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal ausführbar sind, also wiederum Strecken ergeben, kann man auch irrationale Größen mit demselben Recht als Zahl interpretieren" [29, S. 157].

Die Definitionen für die Grundrechenoperationen in **R** hängen von der gewählten Einführung der reellen Zahlen (z.B. als Intervallschachtelungen, als Dedekindsche Schnitte oder als Dezimalzahlen) ab.

Eine mathematisch korrekte Konstruktion der natürlichen Zahlen folgte interessanter Weise erst deutlich später - etwa durch Dedekind, Giuseppe Peano (1858-1932) und Bertrand Russell (1872-1970).

Zusammenfassung

Die Grundrechenoperationen im Mathematikunterricht aus historischer Sicht

Es wird die Behandlung der Grundrechenoperationen seit dem Mittelalter beschrieben und gewertet. Dabei wird deutlich, wie lange das Beherrschen der Grundrechenoperationen sich allein auf das unmittelbare Ausführen-Können dieser Operationen beschränkt hat. Definitionen und Beweise fehlten zunächst völlig. Die Anfänge einer beweisführenden Lehrmethode fielen in dieselbe Zeit, in der die ersten Realschulen und Lehrerseminare entstanden.

Literatur

[1] Bekemeier, B.: Martin Ohm und die Methode der Zahlbereichserweiterungen.-In: Andelfinger, B.; Bekemeier, B.; Jahnke, H. N.: Zahlbereichserweiterungen als Kernlinie des Lehrplans - Probleme und Alternativen.-Bielefeld, 1983.-S. 20-41.-(Occasional Paper; 31))

[2] Bourbaki, N.: Elemente der Mathematikgeschichte.- Göttingen, 1971

[3] Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.- Leipzig, Bd. 2, 1892

[4] Fladt, K.: Didaktik und Methodik des mathematischen Unterrichts.-Frankfurt/M.(, 1950)

[5] Gotthelf, J.: Leiden und Freuden eines Schulmeisters.-In: Sämtliche Werke in 24 Bänden.-Zürich, Bd. 3, T. 2, 1921

[6] Grassmann, H.: Die lineale Ausdehnungslehre.-Leipzig, 1844.- In: Gesammelte mathematische und physikalische Werke.-Leipzig, Bd.1, T.1, 1894

[7] Greve, E.; Rau, H.: Schulbücher für den mathematischen Unterricht im 19. Jh.-In: Math.Phys.Semesterber. 6(1959).-S. 311- 336

[8] Griesing, W.: Moderne Mathematik und Rechenunterricht.-In: Math.Nat.Unterr. 21(1968).-S.109-113

[9] Grundel, F.: Die Mathematik an den deutschen höheren Schulen. Teil 1: Von der Zeit Karl des Großen bis zum Ende des 17.Jh. - Leipzig/Berlin, 1928

[10] Günther, S.: Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525.-In: Monumenta Germaniae Paedagogica, Bd.3.- Berlin, 1887

[11] Hankel, H.: Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung.- Leipzig, 1867

[12] Hankel, H.: Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter.- Leipzig, 1874

[13] Jänicke, E.: Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts.- In: Kehr, C. (Hrsg.): Geschichte der Methodik des deutschen Volksschulunterrichtes, Bd.3: Geschichte des Unterrichts in den mathematischen Lehrfächern in der Volksschule.-Gotha, 1888.-S. 1-180

[14] Leibniz, G. W.: Philosophische Schriften(Hrsg.: C. I. Gerhardt).- Berlin, Bd.7, 1890

[15] Leibniz, G. W.: Opuscules et fragments inedits de Leibniz. Extraits des manuscrits de la Bibliotheque royale de Hanovre par Louis Couturat.-Paris, 1903

[16] Lietzmann, W.: Methodik des mathematischen Unterrichts.- Leipzig, Bd. 2, 1916

[17] Lietzmann, W.: Überblicke über die Geschichte der Elementarmathematik.-Leipzig/Berlin, 1926

[18] Ohm, M.: Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik. Erster Theil:Arithmetik und Algebra enthaltend. 3., umgearb. Auflage.- Nürnberg, 1853 (1. Aufl.: Berlin, 1822)

[19] Ohm, M.: Die reine Elementar-Mathematik.Erster Band, 2. Aufl. - Berlin, 1834 (1. Aufl.: 1825)

[20] Raydt, H.: Lehrbuch der Elementarmathematik.-Leipzig, 1899

[21] Scheibert, C. G.: Lehrbuch der Arithmetik und ebnen Geometrie.-Berlin, 1848

[22] Scherer, H.: Die Volksschule, Teil 1.-In: Rein, W. (Hrsg.): Enzyklopädisches Handbuch der Pädagogik, Bd.9 -Langensalza, 1909.-S. 739-770

[23] Schröder, E.: Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende, Bd. 1: Die sieben algebraischen Operationen.- Leipzig, 1873

[24] Toeplitz, O.: Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen.-In: Jahresber. Dt.Math.-Ver.36(1927).-S. 88-100

[25] Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik. Berlin/Leipzig, Bd. 1, 1930; Bd. 2, 1933, Bd.3, 1937

[26] Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik, Bd. 1: Arithmetik und Algebra. Vollst. neu bearbeitet von K. Vogel, K. Reich,H. Gericke.-Berlin / New York, 1980

[27] Unger, F.: Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung vom Anfang des Mittelalters bis auf die Gegenwart.-Leipzig, 1888

[28] Waerden, B. L. van der : Die "genetische Methode" und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.-In: Praxis Math. 22(1980)2.-S. 52-54

[29] Wußing, H.: Zur Geschichte der Zahlzeichen und des Zahlbegriffes. - In: Wisliceny, J.: Grundbegriffe der Mathematik II(MfL 2).-Berlin, 1974.-S. 146-165

[30] Wußing, H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik (MfL 13).-Berlin, 1979