Das Hilbertsche Axiomensystem

Inzidenzaxiome

I 1 *Zu zwei Punkten existiert genau eine Gerade, die mit diesen beiden Punkten inzidiert.*

I 2 *Mit jeder Geraden inzidieren mindestens zwei Punkte. Es existieren drei Punkte, die nicht mit einer Geraden inzidieren.*

Anordnungsaxiome

Es sei Z („liegt zwischen“) eine dreistellige Relation auf der Menge der Punkte mit folgenden Eigenschaften:

A 1 *Wenn $(A, B, C) \in Z$, so sind A, B und C kollinear und es gilt auch $(C, B, A) \in Z$.*

A 2 *Zu je zwei verschiedenen Punkten A und B existiert stets ein Punkt C mit $(A, B, C) \in Z$.*

A 3 *Von drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.*

A 4 (Pasch-Axiom)
Falls eine Gerade durch keinen der Eckpunkte eines Dreiecks verläuft sowie eine offene Seite dieses Dreiecks schneidet, so schneidet diese Gerade noch mindestens eine weitere offene Seite des Dreiecks.

Kongruenzaxiome

K 1 *Für jede Strecke $\overline{AB}$ existiert auf jeder Halbgeraden PQ^+ genau ein Punkt R mit $\overline{AB} \equiv \overline{PR}$.*

K 2 *Die Streckenkongruenz ist transitiv.*

K 3 *Ist $B \in \overline{AC}$, $R \in \overline{PQ}$, $\overline{AB}$ kongruent zu $\overline{PR}$ und $\overline{BC}$ kongruent zu $\overline{RQ}$, dann ist auch $\overline{AC}$ kongruent zu $\overline{PQ}$.*

K 4 *Zu jedem Winkel $\angle(g, h)$ und zu jeder Halbgeraden g' gibt es in jeder Halbebene bezüglich g' genau eine Halbgerade h' mit demselben Scheitel O, so daß die Winkel $\angle(g, h)$ und $\angle(g', h')$ zueinander kongruent sind.*

K 5 *Jeder Winkel ist zu sich selbst kongruent.*

K 6 *Wenn für zwei Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{A'B'C'}$ gilt $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ und $\angle(BAC) \equiv \angle(B'A'C')$, so gilt auch $\angle(ACB) \equiv \angle(A'C'B')$.*

Stetigkeitsaxiome

S 1 (Archimedes-Axiom)
Es seien $\overline{AB}$ *und* $\overline{CD}$ *beliebige Strecken. Dann existieren Punkte* A_1,A_2, $\ldots A_n$ *auf der Halbgerade* AB^+ *derart, daß*

a) $\overline{AA_1} \equiv \overline{A_1A_2} \equiv \cdots \equiv \overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{CD}$ *und* *b)* $B \in \overline{AA_n}$.

S 2 (Cantor-Axiom)
Auf einer beliebigen Geraden g *sei eine unendliche Folge von Strecken* $\overline{A_iB_i}$ *gegeben mit* $\overline{A_{i+1}B_{i+1}} \subset \overline{A_iB_i}$ *(für alle* $i \in \mathbf{N}$*), und es gebe zu jeder Strecke* $\overline{CD}$ *eine natürliche Zahl* n *mit* $l(\overline{A_nB_n}) < l(\overline{CD})$*. Dann existiert auf* g *ein Punkt* P *mit* $P \in \overline{A_iB_i}$ *für alle* $i \in \mathbf{N}$.

($l(\overline{CD})$ ist die Äquivalenzklasse aller zu $\overline{CD}$ kongruenten Strecken.)

Parallelenaxiom

PA *Zu jeder Geraden* g *und zu jedem nicht auf* g *liegenden Punkt* P *existiert höchstens eine Gerade, die zu* g *parallel ist und durch* P *verläuft.*