Nicht-Kooperative Spieltheorie

Teilnehmer:

Franz Gutsch	Herder-Oberschule
Peat Schmolke	Heinrich-Hertz-Oberschule
Gregor Scholz	Georg-Forster-Oberschule
Ivan Shalnov	Herder-Oberschule
Sebastian Szambelanczyk	Herder-Oberschule
Pooya Tabrizi	Herder-Oberschule
Felix Winkler	Heinrich-Hertz-Oberschule

Gruppenleiter:

Ulrich Horst	Humboldt-Universität zu Berlin
Helena Kauppila	Technische Universität Berlin, Columbia University, New York

Inhaltsverzeichnis

1 Womit beschäftigt sich die Spieltheorie?

Spieltheorie – was ist das? Wo wird sie gebraucht? Gleich vorneweg: Es handelt sich nicht nur um Kartenspielen. Es geht dabei um viel mehr. Die Spieltheorie beschäftigt sich mit der Maximierung von Gewinn, egal ob in Form von Freude, Geld oder Sachwert. Natürlich kannten die Menschen bereits vor einigen Jahrhunderten diese Optimierungsprobleme, aber mathematisch analysiert wurde dieses Thema erstmals Mitte des 20. Jahrhunderts in „Games and Economic Behaviour“ von von Neumann und Morgenstern. Der vielleicht bekannteste Mathematiker, der sich mit der Spieltheorie beschäftigte, ist John Nash. Nach ihm wurde das bekannte Nash-Gleichgewicht benannt. Berühmtheit erlangte er auch durch den mit zahlreichen Oscars ausgezeichneten Hollywoodfilm „A Beautiful Mind“. Auf den folgenden Seiten werden wir anhand einiger ausgewählter Beispiele zeigen, wie und wo die Spieltheorie Anwendung findet.

Die Spieltheorie teilt sich in zwei unterschiedliche Gebiete. Zum einen in die *Kooperative Spieltheorie* und zum anderen in die *Nicht-Kooperative Spieltheorie*. Der Unterschied zwischen den beiden ist folgender: Bei der Kooperativen Spieltheorie bestimmen zum Beispiel bindende Verträge das Handeln der einzelnen Personen oder Parteien. Bei der Nicht-Kooperativen Spieltheorie ist dies nicht der Fall. Man ist in seinem Handeln nicht durch Konventionen beeinflusst. Wir werden uns hier nur mit der Nicht-Kooperativen Spieltheorie beschäftigen.

2 Reine und gemischte Strategien

2.1 Einfaches Beispiel: Zonk

Stellen Sie sich vor, sie wurden in eine Fernsehshow eingeladen – “Geh aufs Ganze“. Ihnen werden drei große Tore präsentiert und Sie wissen, dass sich hinter einem dieser Tore ein nagelneues Auto verbirgt. Natürlich wollen Sie das Auto. Jetzt stellt sich die Frage, wie Sie ihre Gewinnwahrscheinlichkeit maximieren können. Angenommen Sie wählen Tor 1, denn Sie sind zuversichtlich, dass sich dahinter das Auto verbirgt. Der Moderator löst das Rätsel allerdings nicht sofort auf, sondern öffnet zuvor noch Tor 3. Er weiß, dass sich dort kein Auto, sondern ein Zonk, also eine Niete, versteckt. Nun bietet er Ihnen an, noch einmal zu wechseln. Sie wissen, dass er das für gewöhnlich mit den Kandidaten macht, um die Spannung zu erhöhen. Doch er verrät Ihnen noch viel mehr durch sein Angebot und das Öffnen von Tor 3. In diesem Fall wäre es günstig zu wechseln.

Sie verdoppeln so ihre Gewinnwahrscheinlichkeit: Hätte er Sie nicht tauschen lassen, hätten Sie mit gerade mal $\frac{1}{3}$ Wahrscheinlichkeit das Auto gewonnen. Dadurch, dass er Sie hat tauschen lassen, schenkte er Ihnen die $\frac{1}{3}$ Wahrscheinlichkeit von Tor 3 dazu. Das wird durch eine einfache Fallunterscheidung verständlich:

Wenn man eines der beiden leeren Tore als erstes auswählt, landet man zwangsweise bei dem Tor mit dem Auto, da das jeweils andere leere Tor geöffnet wird und man wechseln kann. Wählt man allerdings das Tor mit dem Auto, so wechselt man von diesem Tor weg und verliert. Somit beträgt Ihre gesamte Gewinnwahrscheinlichkeit im Fall *Wechseln* $\frac{2}{3}$.

Die gerade beschriebene Situation kann als eine Spiel betrachtet werden, in dem ein Akteur („Spieler'") gegen den Zufall, d.h. „die Natur“ spielt. Die nicht-kooperative Spieltheorie behandelt weitaus allgemeinere Situationen. Ziel der nicht-kooperative Spieltheorie ist die Analyse ökonomischer Konfliktsituationen in denen die Auszahlung eines einzelnen Akteurs sowohl von seinen eigenen Aktionen als auch von den Aktionen anderer Spieler abhaängt.

Definition 2.1 *Ein* Spiel in Normalform *ist ein Tripel* (I, S, u) *mit*

$$\begin{array}{lll} I & = \{1, 2\} & \text{Spieler 1 und 2} \\ S_i & = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} & \text{Strategien eines Spielers } i \in I \end{array}$$

$u_1(s_j, s_k)$ ist die Auszahlung des Spielers 1, falls er $s_j \in S_1$ und sein Gegenspieler $s_k \in S_2$ wählt. Gleiches gilt für u_2.

Theoretisch kann die Menge der Spieler I beliebig viele Spieler beinhalten, in diesem Bericht wird aber nur auf Spiele mit zwei beteiligten Spielern (Spieler 1 und Spieler 2) eingegangen.

Häufig werden Spiele in Form einer Auszahlungsmatrix dargestellt. Unter Verwendung der genannten Begrifflichkeiten sähe die Matrix eines Zweispielerspiels wie folgt aus:

	$s_m \in S_2$	$s_n \in S_2$	Spieler 2
$s_j \in S_1$	$u_1(s_j, s_m); u_2(s_j, s_m)$	$u_1(s_j, s_n); u_1(s_j, s_n)$	
$s_k \in S_1$	$u_1(s_k, s_m); u_2(s_k, s_m)$	$u_1(s_k, s_n); u_2(s_k, s_n)$	
Spieler 1			

Eine konkrete Matrix könnte wie folgt aussehen:

	L	R
O	4; 1	3; 0
U	2; 2	0; 1

Definition 2.2 *Eine reine Strategie* $s_i \in S_1$ *für den Spieler* 1 *ist* streng dominiert, *wenn eine weitere Strategie* $s_j \in S_1$, $i \neq j$ *existiert, so dass gilt:*

$$\forall s_k \in S_2 : u_1(s_j, s_k) > u_1(s_i, s_k)$$

In Worten: Egal welche Strategie s_k der Gegner wählt, so ist stets die Auszahlung u_1 bei meiner Strategie s_j größer als jene meiner dominierten Strategie s_i. In der obigen Beispielmatrix sind also R und U streng dominiert.

Definition 2.3 *Analog gilt für* dominierte *Strategien:*

$$\forall s_k \in S_2 : u_1(s_j, s_k) \geq u_1(s_i, s_k) \tag{1}$$
$$\exists s_m \in S_2 : u_1(s_j, s_m) > u_1(s_i, s_m) \tag{2}$$

Eine Beispielmatrix für diesen Fall könnte wie folgt aussehen:

	L	R
O	4; 1	0; 1
U	2; 0	0; 0

Hier ist U dominiert.

2.2 Beispiel: Gefangenendilemma

Zwei Bankräuber rauben eine Bank aus. Anschließend werden sie separat voneinander verhört. Jedem wird folgendes Angebot unterbreitet: Wenn er das Verbrechen zugibt und sein Partner es leugnet, wird er freigelassen. Sein Partner muss dann für sechs Jahre in das Gefängnis. Wenn jedoch beide das Verbrechen zugeben, müssen sie für drei Jahre ins Gefängnis. Falls beide leugnen, werden sie nur des illegalen Waffenbesitzes überführt und müssen für je ein Jahr ins Gefängnis.

Wir stellen eine Gewinnmatrix auf:

	L	G
L	$-1; -1$	$-6; 0$
G	$0; -6$	$-3; -3$

Sie repräsentiert die Gefängnisstrafen, die die Täter bei entsprechender Entscheidung (leugnen oder gestehen) zu erwarten haben. Die Täter sehen sich vor das Problem gestellt, die optimale Entscheidung zu treffen, ohne von der Wahl des anderen zu wissen.

Die Normalform dieses Spieles lautet:

$$\begin{array}{cl} I & = \{1, 2\} \\ S_1 = S_2 & = \{L, G\} \\ u_1(L, L) & = -1 \\ u_1(L, G) & = -6 \\ \text{etc.} & \end{array}$$

Definition 2.4 *Das* Nash-Gleichgewicht *in einem Spiel beschreibt einen Zustand eines strategischen Gleichgewichts, von dem ausgehend kein einzelner Spieler für sich einen Vorteil erzielen kann, indem er einseitig von seiner Strategie abweicht.*

Das Nash-Gleichgewicht liegt bei obigem Spiel folglich bei (G,G), da hier für keinen Spieler Anlass besteht, bei Beständigkeit des anderen seine Wahl zu ändern. Dennoch liegt es nahe, dass zwei sich wohlgesonnene Spieler bei Wiederholung des Spiels vorher auf (L,L) einigen würden, auch wenn diese Strategie höchst instabil ist, da die Gefahr besteht, dass der Opponent von der gewählten Strategie abweicht und somit ein besseres Resultat erreicht.

Definition 2.5 Gemischte Strategien *sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen* σ_i *auf* S_i*, wobei* $\sigma_i(s_k)$ *die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der Spieler* i *die Strategie* $s_k \in S_i$ *auswählt.*

Sei $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ *eine gemischte Strategie für beide Spieler, dann gilt*

$$u_i(\sigma) = \sum_{s_j \in S_1, s_k \in S_2} \sigma_1(s_j)\sigma_2(s_k)u_i(s_j, s_k)$$

2.3 Beispiel: Kampf der Geschlechter

Bei diesem Beispiel geht es um Entscheidungsschwierigkeiten zwischen einem Mann und einer Frau. Beide wollen den Nachmittag zusammen verbringen, haben jedoch verschiedene Interessen: der Mann bevorzugt ein Fußballspiel (F), die Frau möchte zu einem Tanzabend (T). Es besteht allerding im Vorfeld *keine Abstimmungsmöglichkeit*. Die (Glücks-)Auszahlungsmatrix ist in diesem Fall gegeben durch:

	λ_F	$1 - \lambda_F$
$1 - \lambda_M$	$1; 2$ $u_F(T,T); u_M(T,T)$	$0; 0$ $u_F(T,F); u_M(T,F)$
λ_M	$0; 0$ $u_F(F,T); u_M(F,T)$	$2; 1$ $u_F(F,F); u_M(F,F)$

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind:

$$\begin{array}{lll} \sigma_F(T) & = \lambda_F & \text{Frau wählt Tanzabend} \\ \sigma_M(F) & = \lambda_M & \text{Mann wählt Fußball} \\ \sigma_F(F) & = (1 - \lambda_F) & \text{Frau wählt Fußball} \\ \sigma_M(T) & = (1 - \lambda_M) & \text{Mann wählt Tanzabend} \end{array}$$

Wie man der Matrix entnehmen kann, gibt es zwei Nash-Gleichgewichte (T,T) und (F,F) in reinen Strategien, die jeweils einen Kompromiss darstellen. Neben diesen beiden Gleichgewichten gibt es auch noch ein Gleichgewicht in gemischten Strategien, bei dem jeder teilweise von seiner bevorzugten Strategie abweichen muss.

Nun muss zuerst aus der Sicht der Frau berechnet werden, mit was für einer Wahrscheinlichkeit der Mann sich für seine favorisierte Aktivität entscheidet. Wenn er dieses Verhältnis einhalten würde, könnte die Frau ausrechnen, im welchem Verhältnis sie ihre Entscheidung treffen sollte, um auf das für sie beste Ergebnis zu kommen. Dies kann man mit Hilfe einer Extremwertbetrachtung berechnen. Dazu nehmen wir zunächst an, dass sich der Mann mit Wahrscheinlichkeit λ_M^* für „Fußball“ entscheidet. Somit ist die erwartete Auszahlung der Frau als Funktion der Wahrscheinlichkeit λ_F, mit der diese „Tanzabend“ wählt, gegeben durch:

$$\mathbb{E}(u_F(\lambda_M^*, \lambda_F)) = 1 \cdot \lambda_M^* \cdot (1 - \lambda_F) + 2 \cdot \lambda_F \cdot (1 - \lambda_M^*)$$

wobei $\mathbb{E}$ den Erwartungswert einer Funktion bezeichnet. Nun bestimmen wir die erste Ableitung um die optimale Aktion der Frau für ein gegebenes λ_M^* zu berechnen:

$$(\mathbb{E}(u_F(\lambda_M^*, \lambda_F)))' = -\lambda_M^* + 2 - 2 \cdot \lambda_M^* = -3 \cdot \lambda_M^* + 2.$$

Wir sehen also, dass die Erwartungswertfunktion für $\lambda_M^* \neq \frac{2}{3}$ ein Extremum besitzt. Ein Gleichgewicht in gemischten Strategien in 2×2-Matrixspielen zeichnet sich nun aber gerade dadurch aus, dass jeder Spieler im Gleichgewicht indifferent zwischen seinen reinen Strategien ist, die erwartete Auszahlung also konstant sein muss!

Die obigen Überlegungen haben nun aber gezeigt, dass die Frau in unserem Beispiel genau dann indifferent zwischen den reinen Strategien „Fußball“ und „Tanzabend“ ist, wenn

$$\lambda_M^* = \frac{2}{3}$$

gilt. Aus Symmetriegründen ist der Mann dann und nur dann indifferent zwischen seinen reinen Strategien, wenn

$$\lambda_F = \frac{2}{3}$$

gilt. Damit haben wir als drittes Nash-Gleichgewicht

$$\lambda_F^* = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \lambda_F^* = \frac{2}{3}$$

identifiziert. Zur Probe sei lediglich angemerkt, dass kein Spieler durch einseitige Abweichung seine erwartete Auszahlung echt verbessern kann – die Wahrscheinlichkeiten des Opponenten sind ja gerade so gewählt, dass es den Spielern egal ist, welche Aktion sie spielen.

Abschließend bemerken wir noch, dass die erwartete Auszahlung für beide Spieler $\frac{2}{3}$ beträgt. Anhand dieses Ergebnisses sieht man, dass die einzelne Person zwar im Durchschnitt weniger als in dem Kompromiss erhält, jedoch eine größere Fairness besteht.

2.4 Beispiel: Cournot-Wettbewerb

Dieses Beispiel beschäftigt sich mit dem Problem, welches zwei Firmen haben, die ein exakt gleiches Produkt auf den freien Markt ausschütten. In unserem Beispiel sind dies zwei Ölfirmen, die zu gleichen Kosten Öl produzieren. Die Frage, die sich den Firmen nun stellt ist: Wieviel Öl sollte man produzieren, um den größtmöglichen Gewinn zu erzielen? Unser mathematisches Ziel ist also, das Nash-Gleichgewicht dieses Problems zu ermitteln.

Die Produktionsmenge der Firma 1 ist mit q_1 bezeichnet, die der Firma 2 mit q_2. Die Gesamtproduktion errechnet sich folglich aus deren Summe: $q = q_1 + q_2$. Den Marktpreis bestimmt in diesem einfachen Modell die Funtion $p(q) = \max(0; 1 - q)$. Die Produktionskosten einer Firma errechnen sich aus der Produktionskostenkonstante c: $c_1 = c \cdot q_1$ und $c_2 = c \cdot q_2$.

Der erste Schritt ist nun die Berechnung der optimalen eigenen Produktionsmenge anhand einer angenommen Produktionsmenge des Konkurrenten q_2^*:

$$u_1(q_1, q_2^*) = q_1 \cdot p(q_1, q_2^*) - c \cdot q_1$$

Wir suchen ein Maximum, das größer als Null ist, und betrachten daher den Term:

$$\begin{aligned} u_1(q_1, q_2^*) &= q_1 \left(1 - (q_1 + q_2^*)\right) - c \cdot q_1 \\ &= q_1(1 - c - q_2^*) - q_1^2 \end{aligned}$$

Um das Maximum dieser Gewinnfunktion zu ermitteln bilden wir die erste Ableitung und setzen sie gleich Null, was in diesem Fall ausreicht, da der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist:

$$\begin{aligned} 0 = u_1'(q_1, q_2^*) = \frac{\delta u_1(q_1, q_2^*)}{\delta q_1} &= 1 - c - q_2^* - 2q_1 \\ \Rightarrow q_1 &= \frac{1 - c - q_2^*}{2} \end{aligned}$$

Da für den Konkurrenten das gleiche Optimum gilt, weil er den gleichen Rahmenbedingungen ausgesetzt ist, können wir $q_2^* = q_1$ annehmen und einsetzen:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1-c-q_1}{2} \\ q_1 &= \frac{1-c}{3} \\ \Rightarrow q_2 &= \frac{1-c}{3} \end{aligned}$$

Das Paar $\left(\frac{1-c}{3}, \frac{1-c}{3}\right)$ ist somit ein Nash-Gleichgewicht und die stabile Lösung für beide Firmen.

2.4.1 Amortisation einer Investition

Eine abgeänderte Form der Berechnung der optimalen Produktion wird anhand eines Beispiels mit zusätzlich anfallenden Kosten f für eine neue Technologie zur Produktion verdeutlicht.

Es gibt weiterhin 2 Firmen. Beide produzieren das gleiche Produkt. Desweiteren liegen die Kosten für die Produktion eines Produktes bei $c = 2$.

Um den Gewinn zu erhöhen zieht Firma 1 die Investition in eine neue Produktionsanlage in Erwägung, welche die Produktionskosten einer Produkteinheit auf Null senken würde. Aufgrund der anfallenden Kosten f muss diese Firma berechnen, wieviel sie maximal für die neue Technologie investieren darf, um weiterhin Gewinn verzeichnen zu können.

Der Marktpreis für Öl liegt bei $p(q) = \max(0; 14 - q)$ mit $q = q_1 + q_2$.

Der Gewinn der Firma 2 liegt folglich bei:

$$u_2(q_1^*, q_2) = (14 - (q_1^* + q_2)) \cdot q_2 - 2 \cdot q_2$$

Bei der Berechnung des Gewinns der Firma 1 muss man zwei verschiedene Gleichungen aufstellen, die zum einen den Fall der Investition und zum anderen den keiner Investition berücksichtigen.

$$\begin{aligned} &\text{Fall 1: } u_1(q_1, q_2^*) = (14 - (q_1 + q_2^*)) \cdot q_1 - 2 \cdot q_1 \\ &\text{Fall 2: } u_1(q_1, q_2^*) = (14 - (q_1 + q_2^*)) \cdot q_1 - f \end{aligned}$$

Jetzt berechnet man zuerst die bestmögliche Produktionsmenge der Firma 2 in Abhängigkeit von der Produktionsmenge der Firma 1, mit Hilfe der ersten Ableitung und der Gleichsetzung mit null.

$$\begin{aligned} u_2(q_1^*, q_2) &= (14 - (q_1^* + q_2)) \cdot q_2 - 2 \cdot q_2 \\ u_2'(q_1^*, q_2) &= (14 - (q_1^* + q_2)) - q_2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (14 - (q_1^* + q_2)) - q_2 - 2 \\ 0 &= 12 - q_1^* - 2q_2 \\ \Rightarrow q_2 &= \frac{12 - q_1^*}{2} \end{aligned}$$

Wenn Fall 1 eintreten sollte und Firma 1 nicht investiert, handelt es sich um eine identische Gewinnfunktion. Somit ist die bestmögliche Produktionsmenge folgendermaßen gegeben:

$$q_1^* = \frac{12 - q_2^*}{2}$$

Nun kann man die Produktionsmenge der Firma 1 in die Produktionsfunktion der Firma 2 einsetzen Dadurch erhält man die optimale Produktionsmenge der Firma 2. Da die Funktionen jedoch identisch sind, erhält man automatisch die optimale Produktion der Firma 1.

$$\begin{aligned} q_2^* &= \frac{12 - q_1^*}{2} \\ \Rightarrow 2 \cdot q_2^* &= 12 - q_1^* \\ \Rightarrow 2 \cdot q_2^* &= 12 - \frac{12 - q_2^*}{2} \\ \Rightarrow 4 \cdot q_2^* &= 24 - 12 + q_2^* \\ \Rightarrow q_2^* &= 4 \\ \Rightarrow q_1^* &= 4 \text{ (Symmetrie)} \end{aligned}$$

Durch Einsetzung dieser Produktionsmenge in der Gewinnfunktion u_1 oder u_2 erhält man den Gewinn.

$$\begin{aligned} u_{1/2}(q_1^*, q_2^*) &= (14 - (q_1^* + q_2^*)) \cdot q_1^* - 2 \cdot q_1^* \\ u_{1/2}(4, 4) &= (14 - (4 + 4)) \cdot 4 - 2 \cdot 4 \\ u_{1/2}(4, 4) &= 16 \end{aligned}$$

Jetzt betrachtet man den Fall 2, der die Investition der Firma 1 in die neue Technologie berücksichtigt und vergleicht den errechneten Gewinn mit dem aus Fall 1.

$$\begin{aligned}
u_1(q_1, q_2^*) &= (14 - (q_1 + q_2^*)) \cdot q_1 - f \\
u_1'(q_1, q_2^*) &= 14 - q_1 - q_2^* - q_1 \\
0 &= 14 - 2 \cdot q_1 - q_2^* \\
q_1 &= \frac{14 - q_2^*}{2}
\end{aligned}$$

Jetzt setzt man, wie schon im oberen Teil, die Produktionsmenge der Firma 2 ein.

$$\begin{aligned}
2 \cdot q_1^* &= 14 - \frac{12 - q_1^*}{2} \\
4 \cdot q_1^* &= 28 - 12 + q_1^* \\
q_1^* &= \frac{16}{3} \\
q_2^* &= \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

Die neu erhaltenen Werte q_1^* und q_2^* setzt man in die Gewinnfunktion u_1 aus Fall 2 ein.

$$\begin{aligned}
u_1(q_1^*, q_2^*) &= (14 - (q_1^* + q_2^*)) \cdot q_1^* - f \\
u_1\left(\frac{16}{3}, \frac{10}{3}\right) &= \left(14 - \left(\frac{16}{3} + \frac{10}{3}\right)\right) \cdot \frac{16}{3} - f \\
&= \frac{256}{9} - f
\end{aligned}$$

Da die Firma 1 ihren Gewinn vergrößern will, muss der soeben errechneten Gewinn größer sein als der Gewinn ohne der neuen Technologie.

$$\begin{aligned}
16 &\leq \frac{256}{9} - f \\
f &\leq \frac{112}{9} = 12,\overline{4}
\end{aligned}$$

Somit lohnt sich die Investition für die Firma 1 lediglich, wenn der Preis für die neue Technologie kleiner als $12,\overline{4}$ ist.

2.4.2 Zwei-Schritt-Wettbewerb

Betrachten wir nun eine kleine Abwandlung vom Cournot-Wettbewerb, bei dem die Firmen ihre Produktionsmengen nacheinander bestimmen. Wir nehmen an, dass die

2. Firma den für sie maximalen Profit zu erreichen versucht. Unter dieser Annahme kann die erste Firma ihre Produktionsmenge so wählen, dass ihr Profit optimal ist. Man betrachte die Profitfunktion der 1. Firma für ein festes $q_2^* = \frac{1-q_1-c}{2}$ (Maximum siehe oben).

$$\begin{aligned}
u_1(q_1) &= q_1 \cdot p(q_1, q_2^*) - c \cdot q_1 \\
&= q_1 \cdot \left(1 - q_1 - \frac{1-q_1-c}{2}\right) - c \cdot q_1 \\
&= q_1 \cdot \frac{1-q_1+c}{2} - c \cdot q_1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot (q_1 \cdot (1-c) - q_1^2)
\end{aligned}$$

Nun setzen wir die Ableitung gleich Null, um das Maximum zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
u_1'(q_1) = 0 &= \frac{1}{2}(1 - c - 2q_1) \\
\Rightarrow q_1 &= \frac{1-c}{2}
\end{aligned}$$

Die erste Firma wird also unter der Annahme, dass die zweite Firma rein rational entscheidet, ihre Produktionsmenge $q_1 = \frac{1-c}{2}$ wählen.

3 Existenz des Nash-Gleichgewichtes

Definition 3.1 *Ein* Nash-Gleichgewicht $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ *ist eine gemischte Strategie aus der Menge* $\mathcal{M}$ *aller Strategien, bei der für alle Spieler* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *und alle reinen Strategien* s_i *gilt:*

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}^*),$$

das heißt bei einseitigem Abweichen zu einer reinen Strategie wird der Gewinn kleiner. Hierbei bezeichnet σ_{-i}^* *das* $(n-1)$*-Tupel der Strategien der Gegner von Spieler* i*.*

Satz 3.1 *Sei* σ^* *ein Nash-Gleichgewicht, dann gilt für alle gemischten Strategien* σ_i *und alle* i*:*

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) &= \sum_{k=1}^{N} \sigma_i(s^k) \cdot u_i(s^k, \sigma_{-i}^*) \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{N} \sigma_i(s^k) \right) \cdot \max_{k \in \{1,2,\ldots,N\}} \{u_i(s^k, \sigma_{-i}^*)\} \\
&= \max_{k \in \{1,2,\ldots,N\}} \{u_i(s^k, \sigma_{-i}^*)\} \\
&\leq u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 3.2 *Es existiert immer ein Nash-Gleichgewicht.*

Der Beweis benutzt das folgende Fixpunkttheorem.

Theorem 1 *Sei X eine abgeschlossene, nichtleere und konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle oberhalb semi-stetigen konvex-wertigen Abbildungen F von X auf sich selbst, so dass $F(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$ gilt, dass sie einen Fixpunkt besitzen, das heißt:*

$$\exists (\tilde{x} \in X) : F(\tilde{x}) = \tilde{x}.$$

Als Folgerung aus dem vorhergehenden Theorem erhalten wir, dass jede stetige Selbstabbildung einer kompakten und konvexen Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ auf sich selbst einen Fixpunkt besitzt.

Folgerung 3.1 *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex und $F : X \to X$ stetig. Dann hat F einen Fixpunkt.*

Außerdem benötigen wir den Begriff der *besten Rückgabefunktion* (der Einfachhalt halber nur bei zwei Spielern).

Definition 3.2 *Seien M_1 und M_2 die Mengen aller gemischten Strategien für den ersten beziehungsweise zweiten Spieler. Eine Zuordnung $R : M_2 \to M_1$ heißt* beste Rückgabefunktion*, wenn für jede Strategie $p \in R(\sigma_2)$ gilt:*

$$u_1(p; \sigma_2) = \max_{\sigma_1 \in M_1} (u_1(\sigma_1, \sigma_2)),$$

das heißt alle Strategien für Spieler 1, die $R(\sigma_2)$ ausgibt, erwirtschaften einen maximalen Gewinn für Spieler 1, wenn Spieler 2 die Strategie σ_2 spielt.

Wir deuten nun den eigentlichen Beweis an.

„Beweis": Die Ausgangsmenge ist die Menge aller Strategien (konvex, nichtleer und abgeschlossen). Man definiere eine Abbildung $F : X \to X$ mit :

$$F(p;q) = (R_1(q), R_2(p))$$

Diese Funktion ordnet einem Paar von Strategien ein Paar mit den besten Rückgabewerten zu. Es ist zu beweisen, dass die Menge, auf die abgebildet wird, abgeschlossen, nichtleer und konvex ist. Die besten „Rückgaben" existieren (es lässt sich für jede Strategie mindestens eine beste Gegenstrategie finden) und sind abgeschlossen. Konvexität ist noch zu zeigen: Seien σ_1 und σ_2 Elemente von $R_1(q)$. Nun ist zu zeigen, dass für alle $\lambda \in [0;1] \quad (\lambda \cdot \sigma_1 + (1-\lambda) \cdot \sigma_2)$ ebenfalls in $R_1(q)$ liegt.

$$\begin{aligned} u(\lambda \cdot \sigma_1 + (1-\lambda) \cdot \sigma_2, s) &= \lambda \cdot u(\sigma_1, s) + (1-\lambda) \cdot u(\sigma_2, s) \\ &= \lambda \cdot \max_{x \in M_1} u(x,s) + (1-\lambda) \cdot \max_{x \in M_1} u(x,s) \\ &= (\lambda + (1-\lambda)) \cdot \max_{x \in M_1} u(x,s) \\ &= \max_{x \in M_1} u(x,s) \end{aligned}$$

Dies entspricht der Definition für die beste Rückgabefunktion. Der Beweis geeigneter Stetigkeitseigenschaften ist etwas aufwendiger und soll daher an dieser Stelle weggelassen werden.

Nun muss es nach dem Fixpunkttheorem ein Strategiepaar $(\tilde{p}, \tilde{q})$ geben, für das gilt:

$$F(\tilde{p}, \tilde{q}) = (R_1(\tilde{q}), R_2(\tilde{p}))$$

$\tilde{p}$ gehört zu jenen Strategien, die bei der Strategie $\tilde{q}$ den maximalen Gewinn erzeugen. Es gibt also keine andere Strategie, die mehr Gewinn erwirtschaften könnte. Dies entspricht der Definition für eine Strategie des Nash-Gleichgewichtes. Für $\tilde{q}$ gilt das entsprechend. Das Paar $(\tilde{p}, \tilde{q})$ ist also Nash-Gleichgewicht. Damit ist der Beweis beendet.

4 Fazit

Mit Hilfe mathematischer Modelle gelingt es, viele ökonomische Probleme des Alltags zu analysieren und zu lösen. Wir haben einige Beispiele kennengelernt und die Vielfältigkeit der Nicht-Kooperativen Spieltheorie nur angeschnitten. In einigen Fällen scheitern diese Modelle jedoch an der teilweisen Irrationalität des menschlichen Denkens.