Humboldt-Universität zu Berlin

Fachdidaktisches Hauptseminar Mathematik / Forschungskolloquium "Übergänge gestalten"

Folien zu dem Vortrag von Thorben Borck, Maxi Greiner, Janin Greiner-Bär, Edith Neuschild, Stephanie Opitz, Carmen Schwarz

HEURISTISCHE STRATEGIEN II

Strategien, Förderung, Klassifizierung von Problemaufgaben

HEURISTIK

- „heuriskein“ (griech.): finden, entdecken
- Archimedes: „Heureka“ „ich habe es gefunden.“
- Heuristik (griech.): Lehre, Wissenschaft von den Verfahren, Probleme zu lösen

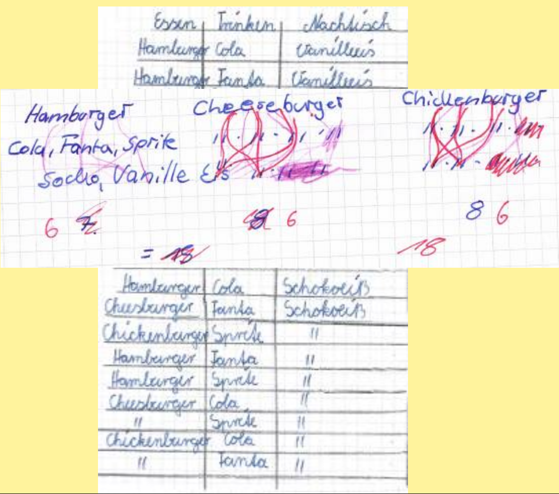
STRATEGIEN

- **systematisches Probieren / Zählen**
- **Vorwärtsarbeiten**
- **Rückwärtsarbeiten / Rückwärtsrechnen**
- **Umstrukturieren**
- **Benutzen von Variablen**
- **Visualisieren**
- **Suchen nach Beziehungen / Aufstellen von Gleichungen oder Ungleichungen (Muster erkennen)**
- **Analogieprinzip**
- **Symmetrieprinzip**
- **Invarianzprinzip**
- **Extremalprinzip (Extremfälle untersuchen)**
- **Zerlegungsprinzip**
- **Suchraumeingrenzung**

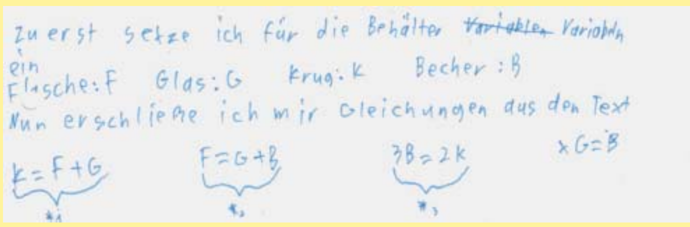
VERWENDETE SCHÜLERSTRATEGIEN

- **systematisches Probieren / Zählen**
- **Vorwärtsarbeiten**
- Rückwärtsarbeiten / Rückwärtsrechnen
- Umstrukturieren
- **Benutzen von Variablen**
- **Visualisieren**
- **Suchen nach Beziehungen / Aufstellen von Gleichungen oder Ungleichungen (Muster erkennen)**
- **Analogieprinzip**
- Symmetrieprinzip
- Invarianzprinzip
- **Extremalprinzip (Extremfälle untersuchen)**
- Zerlegungsprinzip
- Suchraumeingrenzung

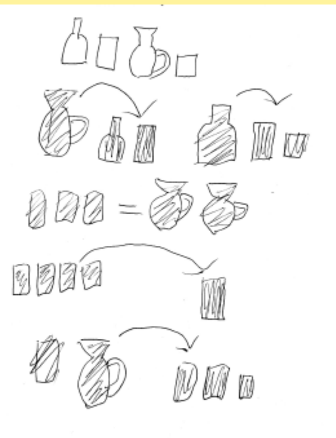
SYSTEMATISCHES PROBIEREN / ZÄHLEN



BENUTZEN VON VARIABLEN



VISUALISIEREN



SUCHEN NACH BEZIEHUNGEN / GLEICHUNGEN ERSTELLEN

Zuerst setze ich für die Behälter ~~Variablen~~ Variablen ein

Flasche: F Glas: G Krug: K Becher: B

Nun erschließe ich mir Gleichungen aus den Text

$\underbrace{K=F+G}_{*_1}$ $\underbrace{F=G+B}_{*_2}$ $\underbrace{3B=2K}_{*_3}$ $x G = B$

Nun setze ich für K in $*_3$ F+G ($*_1$) ein, und für das F setze ich $*_2$ ein:

$3B = 2(G+B+G)$

$\Leftrightarrow 3B = 4G + 2B \quad | -2B$

$\Leftrightarrow B = 4G$

Also passen 4 Gläser in einen Becher.

UND EINIGE ANDERE STRATEGIEN UND PRINZIPIEN

BEISPIELE

<u>Beispiel 1:</u>

Vom Teufel und dem armen Manne

Der Teufel sagte zu einem armen Manne: „Wenn du über diese Brücke gehst, will ich dein Geld verdoppeln, doch musst du jedes Mal, wenn du zurückkommst, 8 Taler für mich ins Wasser werfen.“

Als der Mann das dritte Mal zurückkehrte, hatte er keinen blanken Heller mehr. Wie viel hatte er anfangs?

Nina: Ich weiß, wie wir rechnen.
Stefan: Ich glaube 2, nee 4 waren's.
Nina: Nach'm dritten Mal hatte er doch keine mehr, ne?
Stefan: Mhm.
Nina: **Und da musste einfach, dass er wieder zurückgeht. Wenn er vom dritten Mal wieder zurückgeht, flutschen die 8 Taler wieder hoch, wenn ich's mal so zeigen kann. Da hat er sie wieder in der Hand und wenn er dann hinten angekommen ist, hat er dann ..., Gott, wie viel hat er dann ..., oh, doch nicht so einfach.**
Stefan: Erst müsste er 4 haben.
Nina: Da müssten wir doch mit dem ersten anfangen.
(zeichnet sich eine Tabelle)
Stefan: Der müsste 4 haben und dann, wenn er nämlich das Doppelte: 4 + 4 = 8, die 8 schmeißt er rein, also müsste mit der 4 dann wieder rückwärts rechnen + 8; 4 + 8.

Nina: Genau, genau, he, hi.
Stefan: 4 + 8 is'? 4 + 8 = 12
Nina: Glaubst de?
Stefan: Ja, 4 + 8 = 12.
Nina: **Wie rechnest du jetzt eigentlich?**
Stefan: **Rückwärts.**
Nina: **Wie macht er das nur immer?**
(Stefan rechnet für sich weiter, errechnet 7.)
Versuchsleiterin:
Kannst du erklären, wie [illegible] gekommen bist?
Stefan: **Erst hatte [illegible] 8, die er hatte, die hatte er doch [illegible]en. Hat er kein Geld mehr. Da hat er [illegible] die 4 gehabt, wo er's zweite Mal über die Brücke zurückgegangen ist, da hat er 4 gehabt. Da hab ich auf 12. 4 + 8 = 12. dann wieder die Hälfte ist 6, 6 + 8 = 14 und die Hälfte 7, also hat er vorher 7 gehabt. Fertig.**
(Nina erzeugt die Lösung zur Probe noch einmal durch Vorwärtsarbeiten.)
Nina: Ich hab auch erst rückwärts versucht. Aber da bin ich nicht so richtig weiter gekommen und Stefan hatte es dann schon raus. Da hab' ich dann mit der 7 von Anfang an nachgerechnet. Stimmt!

Rückwärtsrechnen

BEISPIELE

Beispiel 2:

Wir zählen an den Fingern einer Hand: Daumen 1, Zeigefinger 2, Mittelfinger 3, Ringfinger 4, kleiner Finger 5 und nun rückwärts weiter: Ringfinger 6, Mittelfinger 7, Zeigefinger 8, Daumen 9 und dann wieder vorwärts weiter: Zeigefinger 10 und so weiter. Für welchen Finger ergibt sich die Zahl 2002?

Erläutere ausführlich, wie du auf die Lösung gekommen bist.

Hier die Lösung von Marc (mathematischer Korrespondenzzirkel):

- Wenn der Daumen 0 wäre, hätten wir immer beim Daumen ein Vielfaches von 8.
- 2000 ist ein Vielfaches von 8.
- Da der Daumen [illegible] ist bei 2001 der Daumen.
- Dann ist bei 2002 der Zeigefinger dran.

(2002 − 9) : 8 = 249 Rest 1

Umstrukturieren

Abb. 8.5 Lösung von Marc zur Zählaufgabe

BEISPIELE

Beispiel 3:

Die Summe von 3 natürlichen Zahlen beträgt 63. Die erste dieser Zahlen ist um 3 kleiner als die zweite, die dritte um 3 größer als die zweite. Wie lauten diese drei Zahlen?

Ein möglicher *Lösungsweg*: Da die erste der gesuchten Zahlen um 3 kleiner und die dritte um 3 größer als die zweite ist, muss die angegebene Summe der drei Zahlen das Dreifache der zweiten Zahl sein („um 3 kleiner“ und „um 3 größer“ gleichen sich aus). Die zweite Zahl ist demnach 63 : 3 = 21. Die erste Zahl lautet 21 – 3 = 18, die dritte 21 + 3 = 24.

Symmetrieprinzip

BEISPIELE

Beispiel 4:

Mutti ist zurzeit 44 Jahre alt und Tina 18 Jahre alt. Nach wie vielen Jahren wird Mutti (nur noch) doppelt so alt sein wie Tina?

Die Altersdifferenz von Mutti und Tina ändert sich nicht. Sie beträgt 44 Jahre – 18 Jahre = 26 Jahre. Dies bedeutet: Wenn Tina 26 Jahre alt ist, ist Mutti doppelt so alt. Von 18 bis 26 Jahre sind es 8 Jahre.

Also: Nach 8 Jahren wird Mutti doppelt so alt wie Tina sein.

Invarianzprinzip

ZERLEGUNGSPRINZIP

BEISPIELE

1) Flächeninhaltsbestimmung zusammengesetzter Figuren → Zerlegung in geometrische Grundfiguren (Geometrie)
2) Funktionsuntersuchungen (Analysis)
3) Abspalten von Faktoren oder Primfaktorzerlegung bei Teilbarkeitsuntersuchungen von Termen (Algebra)
4) Finden von Parkettierungen (Geometrie)
5) Herleiten der Formel zur Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes → Zerlegen und Ergänzen

- findet schon in Klasse 1 seine bewusste Anwendung, wenn z.B. „über den Zehner" gerechnet wird. Dabei wird die Aufgabe 7+8 in die einfacheren Teilaufgaben 7+3+5 zerlegt.

FÖRDERUNG HEURISTISCHER VORGEHENSWEISEN IM UNTERRICHT

GLIEDERUNG

- Gründe für die Förderung heuristischer Vorgehensweisen in der Schule
- Rückblick und Zusammenhang zum Problemlösen
- „Vermittlung" heuristischer Vorgehensweisen
- Anforderungen an die Aufgaben
- Bedingungen für eine erfolgreiche heuristische „Beschulung"
- Probleme
- Fazit

GRÜNDE FÜR DIE FÖRDERUNG HEURISTISCHER VORGEHENSWEISEN IN DER SCHULE

- fachspezifisches und fachübergreifendes Hilfsmittel beim Problemlösen
- erlauben zielgerichtetes, zweck- und planmäßiges Vorgehen
- besseres Verständnis der Denkoperationen → höhere Motivation der Schüler, mehr Freude am Mathematikunterricht und mehr Selbstvertrauen
- führt zu Leistungssteigerungen und verringerter Leistungsverweigerung bei schwierigeren Aufgaben
- heuristisch gewonnene und erarbeitete Fertigkeiten und Kenntnisse gelten als wesentlich fester fundiert als die nur rezeptiv aufgenommenen

BEISPIELE

Beispiel 4:

Mutti ist zurzeit 44 Jahre alt und Tina 18 Jahre alt. Nach wie vielen Jahren wird Mutti (nur noch) doppelt so alt sein wie Tina?

BEISPIELE

Beispiel 4:

Mutti ist zurzeit 44 Jahre alt und Tina 18 Jahre alt. Nach wie vielen Jahren wird Mutti (nur noch) doppelt so alt sein wie Tina?

„VERMITTLUNG" HEURISTISCHER VORGEHENSWEISEN

- das Erlernen von Heurismen ist ein langwieriger Prozess – immer wieder im Unterricht integrieren
- nach Klassenstufe und Inhalt müssen Schwerpunkte gesetzt werden
- bei den Schülern Interesse wecken und durch Einsicht und Erfahrung den Nutzen erfahrbar machen
- es empfiehlt sich ein Vorgehen in 4 Schritten

PHASE 1

- Erleben der ausgewählten Vorgehensweise durch Vormachen; maximale Schüleraktivität
- Gewöhnung durch Reflektion im Anschluss an eine Aufgabenlösung: Was hat uns geholfen, die Aufgabe zu lösen?

Ziel: Gewöhnungseffekt

PHASE 2

- Bewusstmachen und zielgerichtete Einführung einer heuristischen Strategie
  - anhand eines sehr sorgfältig ausgewählten markanten Beispiels

Ziel: Widererkennungseffekt

PHASE 3

- ähnliche Beispiele mit unterschiedlicher Schwierigkeit bereitstellen
- Kontexterweiterung der Strategieanwendung
- Einüben dieses bestimmten Vorgehens

Ziel: Sicherheit

PHASE 4

- Das eigene Problemlösemodellaufschreiben: Wie gehe ich vor, wenn ich eine schwierige Mathematikaufgabe lösen will?
- Anwendung an gemischten Beispielen

Ziel: Bewusstmachen und Zurückgreifen

ANFORDERUNGEN AN DIE AUFGABEN

- für die Vermittlung einer bestimmten Vorgehensweise sollten folgenden Anforderungen gestellt werden:
  - alle Aufgaben sollten mit der ausgewählten Vorgehensweise günstig zu lösen sein
  - die Aufgaben sollten in vielen Parametern variieren
  - das Einführungsbeispiel darf nicht zu einfach zu lösen sein
  - qualitative Differenzierung
  - die Aufgaben sollten den Schülern möglichst schnelle Erfolgserlebnisse vermitteln

BEDINGUNGEN FÜR EINE ERFOLGREICHE HEURISTISCHE „SCHULUNG“

Ziel ist es nicht, den Schülern wissenschaftliche Begriffe und Theorien zu vermitteln, sondern Vorgehensweisen, die sie befähigen ihr Problemlöseverhalten zu verbessern.

Ziel: „Hilf mir es selbst zu tun“ (M. Montessori)

- nicht theoretisieren, sondern die Schüler erleben lassen
- Verwendung der „Impulstechnik“
- den Schülern genügend Zeit lassen
- kein vorzeitiges Verraten des Lösungsweges bzw. der Lösung
- geschickte Aufgabenauswahl
- individuelle Auswahl des Lösungsweges bzw. des heuristischen Vorgehens
- innere Differenzierung, um Unter- oder Überforderung zu vermeiden und die Motivation zu erhalten

„GENORMTE IMPULSGEBUNG“

- inhaltsunabhängige Fragen und Impulse geben
- konkrete Tipps müssen unterbleiben - Zurückhaltung
- der erste Impuls sollte möglichst allgemein und unabhängig vom konkreten Aufgabeninhalt sein
- die Schüler übernehmen später die Impulsgebung

- Instruktionsfragen nach Polya

- einseitige Ausprägung und Festlegung der Schüler auf eine Vorgehensweise verhindern - Offenheit

PROBLEME

- Auch wenn für das Arbeiten mit Heurismen viele Gründe sprechen, so gibt es auch Einwände und Schwierigkeiten
  1. Motivation
  2. Übung
  3. Klassenunterricht
  4. Lerninhalte
  5. Lehrerrolle
  6. Zeit- und Arbeitsaufwand

MOTIVATION

- gerade schwächere Schüler haben meist weniger Ausdauer und Konzentration für komplexere Problemlöseprozesse

→ mit entsprechenden Aufgabenstellungen (Lebensnähe, Schülerbezug,…) und innerer Differenzierung begegnen

→erhöhter Arbeits- und Vorbereitungsaufwand

ÜBUNG

- meist überwiegt das Üben der Inhalte

→auch das Üben mit heuristischen Übungsphasen durchsetzen (sonstige Übungsformen dürfen aber nicht zu kurz kommen)

KLASSENUNTERRICHT

- bei Polya findet die Vermittlung heuristischer Vorgehensweisen im Dialog statt (Realität?)

→ eine angemessene Unterrichtsform wählen

→ innere Differenzierung

LERNINHALTE

- RLP bzw. neue Standards machen bestimmte Vorgaben bzgl. der fachlichen Inhalte und des zeitlichen Umfangs

→ die Probleme müssen genau ausgewählt werden, sowie die Auswahl der heuristischen Schwerpunkte

LEHRERROLLE

- während des Vermittlungsvorganges nehmen die Präsenz und die aktive Rolle des Lehrers stetig ab

→ Zeit und Geduld stehen an erster Stelle

→ der Lehrer wird zum Helfer, zum Berater

ZEIT- und ARBEITSAUFWAND

- innere Differenzierung sorgt für mehr Arbeitsaufwand, den zu leisten nicht jeder bereit ist
- außerdem erfordert diese Art des Lernens und Lehrens ein sehr viel breit gefächerteres Vorwissen und eine intensive Analyse der ausgewählten Inhalte und Aufgaben

FAZIT

- trotz der aufgezählten Probleme darf nicht auf die bewusste Vermittlung heuristischer Vorgehensweisen verzichtet werden

- Ohne gewisse Grundkenntnisse und –fertigkeiten ist kein Problemlösen möglich, egal ob mit bewusster Hilfe heuristischer Vorgehensweisen oder ohne

- Die Vermittlung von Verfahren, die den Schülern helfen, selbstständiger mit bestimmten Aufgaben umzugehen –egal ob in Form von Heurismen oder in sonstigen Formen- gehört auf jeden Fall in den Unterricht

Kategorisierung von Problemaufgaben

Es existiert keine allgemeingültige Kategorisierung von Problemaufgaben.

Möglich sind Einteilungen zum Beispiel nach:

- der Klarheit von Ausgangs- und Zielzustand
- den kognitiven Anforderungen
- dem Inhalt/Bereich, aus dem sie stammen

Unterteilung nach McCarthy (1956):

Unterscheidung nach der **Definition des Zielzustandes**.

gut definiertes Problem:

Es gibt von Beginn an ein Kriterium, nach dem für einen beliebigen Zustand entschieden werden kann, ob er einen Endzustand darstellt oder nicht.

schlecht definiertes Problem:

Es gibt keine klaren Zielkriterien.

Unterteilung nach Reitman (1965):

Unterscheidung nach der Genauigkeit der **Definition von Anfangs- und Endzustand**.

Es ergeben sich vier Problemtypen:

1. Anfangszustand und Endzustand klar definiert
2. Anfangszustand und Endzustand unklar definiert
3. Anfangszustand klar und Endzustand unklar definiert
4. Anfangszustand unklar und Endzustand klar definiert

Kategorisierung nach Dörner (1979):

Ein Problem ist der **Unterschied zwischen einem vorliegenden Ausgangszustand und einem gewünschten Endzustand**.

Dieser Unterschied kann durch die Anwendung verschiedener **Operatoren** verkleinert oder aufgehoben werden

Operatoren: Handlungen, die einen Problemzustand in einen anderen transformieren.

Kategorisierung nach Dörner (1979):

Die Probleme werden nach der **Art der Barriere** unterschieden.

		Klarheit der Zielkriterien	
		hoch	gering
Bekanntheitsgrad der Mittel	hoch	Interpolationsbarriere	dialektische Barriere
	gering	Synthesebarriere	dialektische Barriere und Synthesebarriere

Klassifikation von Barrieretypen in Problemen nach den Dimensionen „Bekanntheitsgrad der Mittel“ und „Klarheit der Zielsituation“ (Dörner 1979)

Kategorisierung nach Rasch (2001):

Rasch versteht unter Problemaufgaben problemhaltige Textaufgaben.

Bestimmende Dimensionen:

- entwicklungsspezifische Aspekte
- sprachlich-situative Aspekte
- semantische Aspekte
- mathematisch-logische Aspekte

Kategorisierung nach Rasch (2001):

1. **Problemaufgaben auf Zeit**

2. **Besonderheiten in den Aufgabenbedingungen**
   a) Aufgaben mit sprachlichen und situativen Besonderheiten
   b) Aufgaben mit offenen Elementen
   c) Aufgaben mit rätselhaften Bedingungen

Kategorisierung nach Rasch (2001):

3. **Schwierige mathematische Strukturen**
   a) Aufgaben mit kombinatorischem Hintergrund
   b) Aufgaben zur Schlussrechnung (Dreisatz)
   c) Vergleichs- und Ausgleichsaufgaben
   d) Aufgaben zur Verhältnisverteilung
   e) Aufgaben mit komplexen Informationen
   f) Aufgaben mit unbekanntem Anfangszustand
   g) Aufgaben, denen Zahlenfolgen zugrunde liegen
4. **Aufgaben mit geometrisch-physikalischem Hintergrund**
   a) Bewegungsaufgaben
   b) Textaufgaben, deren Struktur das Verhältnis von Zwischenräumen und Begrenzungen widerspiegelt

1. Problemaufgaben auf Zeit

Streblinde, Murks und Quicki sammeln Kastanien. Sie zählen 117 Stück. Sie wollen die Kastanien gerecht unter sich aufteilen.

2. Besonderheiten in den Aufgabenbedingungen

a) **Aufgaben mit sprachlichen und situativen Besonderheiten**

Beispiel: Gläser – Becher – Aufgabe

b) **Aufgaben mit offenen Elementen**

Auf dem Hof laufen Katzen und Enten herum. Sie haben zusammen 48 Füße. Wie viele jeder Art sind es?

c) **Aufgaben mit rätselhaften Bedingungen**

Vier Enten laufen vor einer, zwei Enten hinter dreien, und drei Enten laufen zwischen zweien. Wie viele Enten sind es?

3. Schwierige mathematische Strukturen

a) **Aufgaben mit kombinatorischem Hintergrund**

Beispiel: Burger, Getränk, Eis

b) **Aufgaben zur Schlussrechnung (Dreisatz)**

Die Mutti kauft für Murks, Quicki und Streblinde Sonnenbrillen. Sie haben den gleichen Preis und kosten zusammen 21 Euro. Wie viel hätte sie bezahlen müssen, wenn sie auch für sich und den Vati eine solche Sonnenbrille gekauft hätte?

3. Schwierige mathematische Strukturen

c) **Vergleichs- und Ausgleichsaufgaben**

Beispiel Vergleichsaufgabe: *Die Summe von 3 natürlichen Zahlen beträgt 63. Die erste dieser Zahlen ist um 3 kleiner als die zweite, die dritte um 3 größer als die zweite. Wie lauten diese drei Zahlen?*

Beispiel Ausgleichsaufgabe: *Murks und Quicki haben zusammen 50 Murmeln. Wenn Murks 8 Murmeln an Quicki verschenkt, dann haben beide gleichviel.*

d) **Aufgaben zur Verhältnisverteilung**

Beispiel: Busaufgabe

3. Schwierige mathematische Strukturen

e) **Aufgaben mit komplexen Informationen**

Beispiel: Gläser – Becher – Aufgabe

f) **Aufgaben mit unbekanntem Anfangszustand**

Beispiel: Vom Teufel und dem armen Manne

g) **Aufgaben, denen Zahlenfolgen zugrunde liegen**

Quicki las in einer Woche ein Buch von 133 Seiten. Am Montag las sie einige Seiten und von da ab jeden Tag 5 Seiten mehrals am Tag davor. Am Sonntag wurde sie fertig.

4. Aufgaben mit geometrisch-physikalischem Hintergrund

a) **Bewegungsaufgaben**

Eine Schnecke in einem 20 m tiefen Brunnen will nach oben. Sie kriecht am Tage immer 5 m hoch und rutscht nachts im Schlaf wieder 2 m nach unten. Am wievielten Tag erreicht sie den Brunnenrand?

b) **Textaufgaben, deren Struktur das Verhältnis von Zwischenräumen und Begrenzungen widerspiegelt**

An einer Straße werden im Abstand von 10 Metern 7 Bäume gepflanzt. Murks überlegt: Wie weit ist es vom 1. bis zum 7. Baum?

Nach Filler, VL Einführung in die Mathematikdidaktik:

Unterscheidung nach **Klarheit des Anfangs- und Zielzustandes** und der nötigen **Transformationen**:

- Standardaufgaben
- Probleme
- Offene Probleme

- objektive Barrieren
- subjektive Barrieren

Nach Filler, VL Einführung in die Mathematikdidaktik:

Einteilung nach **mathematischen Gebieten**.
Häufig sind dabei die folgenden zu finden:

1. Geometrie
2. Zahlentheorie
3. Kombinatorik
4. elementare Logik

... damit geht es weiter in den nächsten Sitzungen ...

QUELLEN

- BARDY, P. (2007) Mathematische Begabungen im Grundschulalter , Spektrum
- DÖRNER, DIETRICH: Problemlösen als Informationsverarbeitung, Stuttgart u.a. ²1979, S. 10-15.
- FILLER, ANDREAS: Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung – Einführung in die Mathematikdidaktik. Teil 5, Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Wintersemester 2009/2010. http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/einfdid0910skript05.pdf
- HEYER, ULRICH: Überlegungen zur langfristigen Ausbildung heuristischer Vorgehensweisen. In: Der Mathematikunterricht Jg. 38, 3/1992, S. 39-50.
- HEYER, ULRICH/KÖNIG, HELMUT: Heuristische Vorgehensweisen bewußt herausbilden - Methodische Empfehlungen für den Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht Jg.38, Heft 3/1992, S.51-65.
- POLYA, GEORGE: Die Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. 4.Aufl. Tübingen 1995, vordere Einbandseiten.
- RASCH, RENATE: Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule, Hildesheim 2001, S. 26-54.
- ZECH, FRIEDRICH: Grundkurs Mathematikdidaktik: Theoretische und praktische Anleitung für das Lehren und Lernen von Mathematik; 10 Auflage, Weinheim 2002.

QUELLEN

- http://www1.tu-darmstadt.de/fb/fb3/psy/ABO/downloads/ferreira/ap.pdf, 18.04.2010, 13:33.
- http://www.intramundia.net/demo/problemloesen/kap1/doks/pdf1_problemtypen.pdf, 18.04.2010, 13:35 (über die Googlesuche).
- http://www.muellerscience.com/PSYCHOLOGIE/Kreativitaet/Problemtypen.htm, 18.04.2010, 13:36 (über die Googlesuche).
- http://de.wikipedia.org/wiki/Probleml%C3%B6sen#Objektive_Problembeschreibung, 18.04.2010, 13:36.
- http://mathematik.ph-weingarten.de/~hafenbrak/docs/Problemloesen/Problem05.pdf