Humboldt-Universität zu Berlin

Fachdidaktisches Hauptseminar Mathematik / Forschungskolloquium "Übergänge gestalten"

Übergänge gestalten

anhand kombinatorischer Probleme

Seminar am 31.05.2010

Referentinnen:

Kristina Wesely, Ariane Dubiel, Sandra Mense

Gliederung

I Theoretischer Hintergrund zur Kombinatorik (8‘)

1. Was ist Kombinatorik?
2. Kombinatorische Figuren (Situationstypen)

II Erste Gruppenarbeitsphase: Lösen kombinatorischer Probleme (25‘)

1. Zuordnung zum Situationstyp
2. Wege zur didaktischen Aufbereitung

III Präsentation der Ergebnisse (25‘)

IV Zweite Gruppenarbeitsphase: Kompetenzförderung (10‘)

V Diskussion (10‘)

VI Feedback (5‘)

I Theoretischer Hintergrund

1. Was ist Kombinatorik?

Zentrale Fragestellungen:

1. **Welche Möglichkeiten gibt es?**
2. **Wie viele Möglichkeiten gibt es?**

Zählen als Weg zur Anzahlbestimmung

ABER: oft zu aufwendig

→ Strategien für geschicktes Zählen nötig

I Theoretischer Hintergrund

1. Was ist Kombinatorik?

Beispiel: Mr. Bean

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9
1	1 0	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9
2	2 0	2 1	2 2	…						
3										
4										
5						…				
6										
7										
8										
9			…	9 3	9 4	9 5	9 6	9 7	9 8	9 9

I Theoretischer Hintergrund

1. Was ist Kombinatorik?

→ Allgemeines Zählprinzip der Kombinatorik

(auch: Fundamentalprinzip des Zählens /
Produkt- oder Multiplikationsregel der Kombinatorik)

Sind Sequenzen mit **n Stellen** zu bilden, und gibt es

k_1 Besetzungen für die 1. Stelle,
k_2 Besetzungen für die 2. Stelle,
…
k_n Besetzungen für die n-te Stelle,

so gibt es insgesamt $\mathbf{k_1 * k_2 * \ldots * k_n}$ verschiedene Möglichkeiten, diese n Stellen zu besetzen.

I Theoretischer Hintergrund

1. Was ist Kombinatorik?

→ Allgemeines Zählprinzip der Kombinatorik

(auch: Fundamentalprinzip des Zählens /
Produkt- oder Multiplikationsregel der Kombinatorik)

Besteht ein Experiment aus **n** einfachen **Teilversuchen**, die unabhängig von einander auszuführen sind, und gibt es

k_1 mögliche Ergebnisse für den 1. Teilversuch,
k_2 mögliche Ergebnisse für den 2. Teilversuch,
…
k_n mögliche Ergebnisse für den n-ten Teilversuch,

dann hat das zusammengesetzte Experiment insgesamt $\mathbf{k_1 * k_2 * \ldots * k_n}$ verschiedene mögliche Ergebnisse/Ausgänge.

I Theoretischer Hintergrund

2. Kombinatorische Figuren (Situationstypen)

Ziehen **von k Kugeln aus** einer Urne mit **n Kugeln** (k ≤ n)	**Mit Beachtung der Reihenfolge („Variation")**	**Ohne Beachtung der Reihenfolge („Kombination")**
Mit Zurücklegen	$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$	$\frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$
Ohne Zurücklegen	$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Sonderfall: k = n $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 =: n!$	$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} =: \binom{n}{k}$

II Erste Gruppenarbeitsphase: Lösen kombinatorischer Probleme

Arbeitsaufträge:

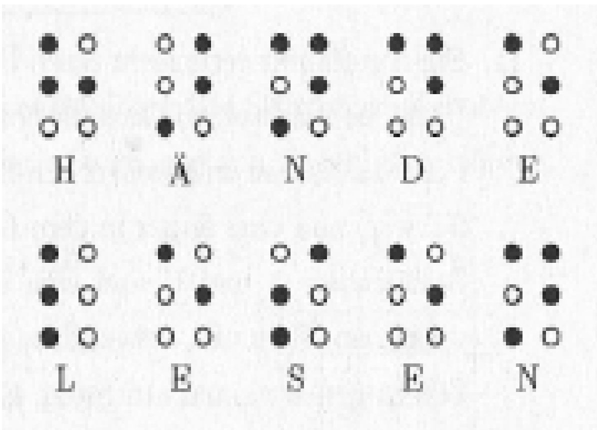
1. Ordne die Aufgabe begründet einem Situationsmodell zu!

2. Didaktische Aufbereitung:
   Würdest du die Aufgabe in einer Unterrichtsstunde durchführen,
   a) welche Repräsentationseben können genutzt werden?
   b) welche Materialien können wie bei der Aufgabe helfen?
   c) welche sprachlichen Impulse können als Hilfen gegeben werden?
   d) Sonstige Hilfen/ Anmerkungen

III Präsentation der Ergebnisse

GRUPPE 1 *Blindenschrift*

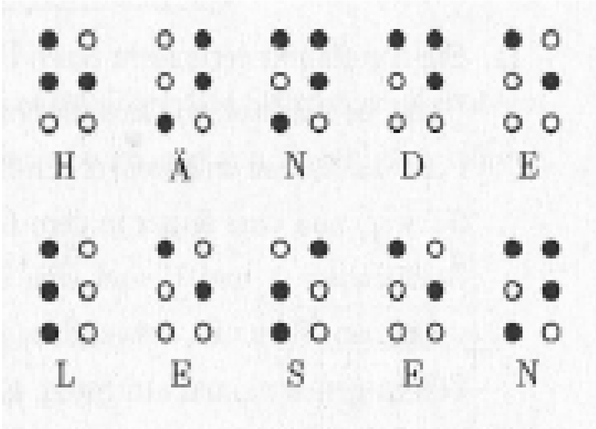
- Die in vielen Ländern eingeführte Blindenschrift (1825 von dem Franzosen Louis Braille, selbst blind) benutzt für die Darstellung der Buchstaben und für die Abkürzung von Wortteilen bzw. Wörtern die bekannte Punktschrift. Die Zeicheneinheit im Blindenalphabet ist ein „Punkte-Sextett“: Jede der sechs Stellen kann als erhabener Punkt (im Bild schwarz markiert) bzw. als nicht-erhabener Punkt dargestellt werden.



→ Wie viele Buchstaben, Wortteile und Wörter kann man so darstellen?

GRUPPE 1 *Blindenschrift*

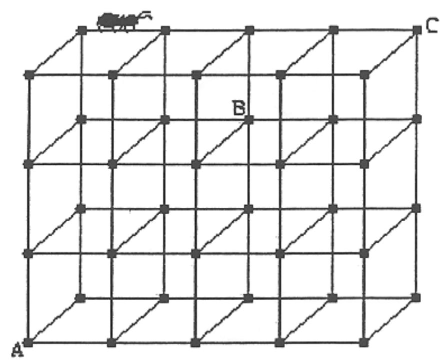
- Die in vielen Ländern eingeführte Blindenschrift (1825 von dem Franzosen Louis Braille, selbst blind) benutzt für die Darstellung der Buchstaben und für die Abkürzung von Wortteilen bzw. Wörtern die bekannte Punktschrift. Die Zeicheneinheit im Blindenalphabet ist ein „Punkte-Sextett“: Jede der sechs Stellen kann als erhabener Punkt (im Bild schwarz markiert) bzw. als nicht-erhabener Punkt dargestellt werden.



→ Wie viele Buchstaben, Wortteile und Wörter kann man so darstellen?

GRUPPE 2 *Ameisenproblem*

- Eine Ameise krabbelt auf einem Drahtgitter (s. Abbildung).



- → Wie viele Möglichkeiten hat sie, ohne Umwege von A nach C zu krabbeln?
- → Auf wie viele Weisen kann sie (wieder ohne Umwege) von A über B nach C krabbeln?

GRUPPE 3 *Berliner Autokennzeichen*

Vergleichen Sie die Mächtigkeiten der Mengen M_1, M_2 und M_3.

Wenn zwei Mengen gleichmächtig sind, begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine entsprechende Zuordnung angeben. Wenn sich Mengen in ihrer Mächtigkeit unterscheiden, geben Sie an, um welche Anzahl von Elementen sie sich unterscheiden.

- M_1 ist die Menge aller theoretisch möglichen Berliner Autokennzeichen mit 2 Buchstaben und 4 Ziffern, wobei die erste Ziffer eine 9 ist.
- M_2 ist die Menge aller theoretisch möglichen Berliner Autokennzeichen mit 2 Buchstaben und 3 Ziffern.
- M_3 ist die Menge aller theoretisch möglichen Berliner Autokennzeichen mit 2 Buchstaben und 5 Ziffern, wobei die erste und die letzte Ziffer eine 3 ist.

(Beachten Sie, dass bei den Ziffern der Kennzeichen 0 nicht an erster Stelle stehen darf.)

GRUPPE 3 *Berliner Autokennzeichen*

Vergleichen Sie die Mächtigkeiten der Mengen M_1, M_2 und M_3.

Wenn zwei Mengen gleichmächtig sind, begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine entsprechende Zuordnung angeben. Wenn sich Mengen in ihrer Mächtigkeit unterscheiden, geben Sie an, um welche Anzahl von Elementen sie sich unterscheiden.

- M_1 ist die Menge aller theoretisch möglichen Berliner Autokennzeichen mit 2 Buchstaben und 4 Ziffern, wobei die erste Ziffer eine 9 ist.
- M_2 ist die Menge aller theoretisch möglichen Berliner Autokennzeichen mit 2 Buchstaben und 3 Ziffern.
- M_3 ist die Menge aller theoretisch möglichen Berliner Autokennzeichen mit 2 Buchstaben und 5 Ziffern, wobei die erste und die letzte Ziffer eine 3 ist.

(Beachten Sie, dass bei den Ziffern der Kennzeichen 0 nicht an erster Stelle stehen darf.)

Situationsmodell: mit Zurücklegen, mit Reihenfolge

Zur Frage: sprachliche Impulse

4 – Schritt – Modell

zur Lösung von Kombinatorik-Aufgaben

(aus „Elementare Stochastik)

1. Schritt: Für die konkret gegebene Aufgabe einige mögliche Lösungen angeben
2. Schritt: Entscheidende Grundfragen klären: m/oZL, m/oRF
3. Schritt: Übertragung in ein Grundmodell (Variablen n und k bestimmen)
4. Schritt: Benutzen der Formel

IV Zweite Gruppenarbeitsphase: Kompetenzförderung

Welche Kompetenzen werden wie konkret bei eurer Aufgabe angesprochen und gefördert?

Welche Kompetenzen werden wie konkret bei eurer Aufgabe angesprochen/ gefördert?

- Allgemeine mathematische Kompetenzen:
  Problemlösen, Argumentieren, Modellieren, Kommunizieren, Darstellen
- Prozessbezogene Kompetenzen des Problemlösens, Problemlöseverfahren

V Diskussionsfrage:

Wie kann es sein, dass im Berliner Rahmenlehrplan
der GS/ Sek I Kombinatorik
so wenig/ einseitig genannt wird?

Auszug aus dem Berliner RLP der Grundschule

Standards Ende Jahrgangsstufe 4/6

- einfache kombinatorische Aufgaben lösen (Daten und Zufall Klasse 1/2)

Beschreibung des Themenfelds Daten und Zufall

„Bei einfachen kombinatorischen Aufgaben geht es um Möglichkeiten der Auswahl und/oder der Anordnung von bestimmten Objekten. Die Schülerinnen und Schüler erwerben Fähigkeiten zur Ausführung systematischer Probierverfahren für das Auffinden von Möglichkeiten und lernen dazu hilfreiche Darstellungsweisen kennen.“

Auszug aus dem Berliner RLP der Sekundarstufe I

Klasse 7/8 Mit dem Zufall rechnen (Zentrale Leitideen: Daten und Zufall, Zahl)

Kompetenzen

- Bestimmen von Anzahlen durch systematisches Zählen

Tätigkeiten

- nutzen geeignete Modelle (z. B. Abzählbäume) zum Abzählen.
- begründen das verwendete Abzählverfahren,
- berechnen Laplace-Wahrscheinlichkeiten durch geschicktes Abzählen auf Grundlage des allgemeinen Zählprinzips.

„Wie kann es sein, dass im Berliner Rahmenlehrplan der Grundschule/ Sekundarstufe I Kombinatorik so wenig/ einseitig genannt wird?“

Mögliche Erklärungen

- Kombinatorik ist keine eigenständiges Themenfeld,
- ist fester Bestandteil des Themenfeldes Daten und Zufall;
- als Anwendung der Multiplikation/ Addition nutzbar
- Kombinatorik ist im Sachrechnen verankert sowie
- in den allgemeinen mathematischen Kompetenzen, speziell Problemlösen;
- Bietet Möglichkeiten der Differenzierung
- Möglichkeit zum spielerisch-experimentellen Vorgehen.

Quellen:

- Herbert Kütting/ Martin Sauer: Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte, Heidelberg: Spektrum, 2008
- Friedhalm Padberg: Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung, Heidelberg: Spektrum, 2007
- Marianne Grassmann/Astrid Heinze: Erkennen und Fördern mathematisch begabter Kinder, Braunschweig, westermann, 2009
- Marianne Franke: Didaktik des Sachrechnens n der Grundschule, Heidelberg: Spektrum, 2003
- Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (u. a. Hrsg.) (2004): Rahmenlehrplan *Grundschule Mathematik*, Brandenburg, 1. Auflage, Nr. 203001.04, Wissenschaft und Technik Verlag
- Ministerium für Bildung, Jugend und Sport Berlin (2006): Rahmenlehrplan *Sekundarstufe I Mathematik*, Berlin, 1. Auflage, Nr. 203001.04, Oktoberdruck AG Berlin
- Gerd Walther/ Marja van den Heuvel-Panhuizen/ Dietlinde Granzer/ Olaf Köller: Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret, Berlin, Cornelsen, 2008
- DUDEN Abiturhilfen: Stochastik I. Beschreibende Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie, Mannheim: Duden, 1999
- Marianne Grassmann, VL Einführung in den Lernbereich Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Erziehungswissenschaften, Abteilung Grundschuldpädagogik, Vorlesungsskript SoSe 2007 und SoSe 2010
- Elke Warmuth, VL Didaktik der Stochastik, Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Vorlesungsskript WS 08/ 09
- http://wl-lang.de/Praxis%20Mathematik/knobel%20allge.-%20Kombinatorik.pdf, letzter Zugriff: 25.05.2010, 14.00 Uhr

Weitere Literaturhinweise:

- Rainer Bodendiek: Streifzüge durch die Kombinatorik, 1995