Philosophische Fakultät IV
Institut für Erziehungswissenschaften
Prof. Dr. Grassmann
Forschungskolloquium: Übergänge gestalten

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Filler
Fachdidaktisches Hauptseminar

# CHARAKTERISIEREN DES PROBLEMLÖSEPROZESSES NACH GEORGE PÓLYA

Referentinnen: Catharina Fritz, Maryna Hauch

26.04.2010

# PLAN DER SITZUNG

1. Einführung/ Motivation des Themas

2. Phasen des Problemlösens

3. Veranschaulichung an einem Beispiel

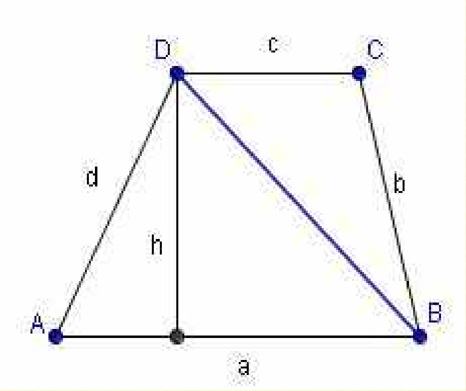
4. Charakteristik von Problemlöseaufgaben

5. Literatur

**Der Flächeninhalt des Trapezes**

Von einem Trapez sind die Längen der parallelen Seiten und die Höhe gegeben:

<u>Wie groß ist sein Flächeninhalt?</u>




$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

- Flächeninhaltsformel des Trapezes bekannt

⇒ *Routineaufgabe*

- Flächeninhaltsformel des Trapezes unbekannt, aber des Parallelogramms und des Dreiecks bekannt

1. Zerlege das Trapez in ein Parallelogramm und ein Dreieck.
2. Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms.
3. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.
4. Addiere beide Flächeninhalte. Die Summe ist der gesuchte Flächeninhalt des Trapezes.

⇒ *Routineaufgabe*

- die Formel und das Verfahren zur Bestimmung des Flächeninhaltes des Trapez unbekannt

⇒ <u>*Problemlöseaufgabe!*</u>

Der Mathematiker George Pólya (1887 - 1985) hat das Problemlösen thematisiert:

- Das Lösen eines Problems ist ein Entdeckungs- und Findungsvorgang, der der wissenschaftlichen Forschung durchaus vergleichbar ist

- Problemlösen ist wichtigste Tätigkeit im Mathematikunterricht an Schulen

- Die Schüler sollen
    (1) maximal aktiviert (soviel wie möglich selbst tun)
    (2) maximal motiviert (Aufgabe lohnt den Einsatz)

  werden

**Bildungsstandards**

Die Bildungsstandards beschreiben mathematische Kompetenzen, die die Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe erreichen sollen. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind das *Problemlösen, Argumentieren, Darstellen, Kommunizieren* und *Modellieren*.

Der Begriff des *Problemlösens* wird hier wie folgt verstanden:

- Mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden,
- Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z.B.: systematisch probieren)
- Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Walter, G/Heuvel-Panhuizen, M./Granzer, D.(Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule. Mathematik Konkret. Verlag Cornelsen Scriptor, Berlin 2007

**Mathematik lernen durch Arbeiten an Problemen**

Die Lehrerinnen und Lehrer werfen Probleme auf, zu deren Lösung ein Weg aus dem Unterricht nicht unmittelbar bekannt ist. Innermathematische Probleme ermöglichen den Schülerinnen und Schülern das Entdecken von mathematischen Regelmäßigkeiten und Mustern. Außermathematische Probleme fordern und fördern die Fähigkeit zur mathematischen Modellbildung.

Anhand von Problemstellungen gewinnen die Schülerinnen und Schüler die Einsicht, dass es oft mehrere Lösungswege gibt und dass nicht jede mathematische Aufgabe genau eine Lösung haben muss. Sie erkennen, dass manche Aufgaben mehrere Lösungen besitzen, während es für andere keine Lösung gibt.

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln in der Auseinandersetzung mit dem Problem individuelle Wege. Dabei greifen sie auf ihre Vorkenntnisse und Erfahrungen zurück und vervollkommnen gleichzeitig ihre mathematischen und strategischen Fähigkeiten.

Sie präsentieren und diskutieren ihre Vorgehensweisen innerhalb der Klasse. Dabei entwickeln sie Verständnis dafür, inwiefern sich die einzelnen Lösungswege qualitativ unterscheiden. Sie lernen, die Wege unter verschiedenen Aspekten zu betrachten und einzuschätzen. Das können die Wahl der Darstellungsebene, die Zweckmäßigkeit des benutzten Hilfsmittels, die Eignung der Methode für die betreffende Aufgabe und die Effektivität des Vorgehens sein. Sie verstehen, dass all diese Kriterien auch individuell unterschiedlich wahrgenommen werden können.

Durch die Diskussion von Lösungswegen wird den Schülerinnen und Schülern bewusst, dass manche Vorgehensweisen als Irrwege, manche als Umwege und andere als besonders effektive Wege beurteilt werden können. Im Überdenken von Irrwegen und Umwegen entwickeln die Schülerinnen und Schüler Mut zum Probieren und zum Fehlermachen, ihr Selbstvertrauen und Selbstbewusstsein werden gestärkt.

Im Prozess der Problembearbeitung werden heuristische Vorgehensweisen als Inhalte des Mathematikunterrichts thematisiert. Auf diese Weise erhalten die Schülerinnen und Schüler Hilfen zur Selbststeuerung und Selbstorganisation des eigenen Lernens. (S. 23 f.)

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend, Sport (Hrsg.): Rahmenlehrplan Grundschule Mathematik. Berlin 2004

„Probleme lösen“ als prozessbezogener mathematischer Kompetenzbereich

Mathematisches Problemlösen findet statt, sobald in einer Situation nicht unmittelbar ein Lösungsverfahren angewendet werden kann, sondern ein Lösungsweg entwickelt oder ausgewählt werden muss. Problemlösen in der Mathematik zeichnet sich durch die Verwendung spezifischer Strategien aus (z.B. Einzeichnen von Hilfslinien, Auswählen von Hilfsgrößen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten) und die Verwendung verschiedener Darstellungsformen (verbal, numerisch, graphisch, symbolisch). Ein wesentlicher Bestandteil des Problemlösens ist die Reflexion von Lösungswegen und von verwendeten Strategien.

[...]– damit ist es abhängig vom Kenntnisstand des Einzelnen. Sogar beim mathematischen Bearbeiten von Modellen und beim Suchen von Begründungen findet Problemlösen statt.

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport in Berlin (2006). Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I &II, Mathematik, Jahrgangsstufe 7 – 10, Hauptschule, Realschule, Gesamtschule, Gymnasium. 1. Auflage Berlin: Oktoberdruck AG.

Wie können Schüler das Problemlösen lernen?

G. Polya: „Wie sucht man die Lösung?“

(1) Verstehen der Aufgabe
(2) Ausdenken eines Plans
(3) Ausführen des Plans
(4) Rückschau

Polya, G.: *Schule des Denkens*, Francke 1995[4], S. 5 ff.

Vertraut werden mit der Aufgabe
Erarbeiten eines besseren Verständnisses

- ***Was ist bekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?***
- Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Ober überbestimmt?
- Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
- Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie formulieren?

Polya, G.: *Schule des Denkens*, Francke 1995[4], S. 5 ff.

- Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du die selbe Aufgabe in einer wenig verschiedener Form gesehen?
- ***Kennst Du die verwandte Aufgabe?*** Kennst du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
- ***Betrachte die Unbekannte!*** Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat.
- ***Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen?*** Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Würdest Du irgendein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?

Polya, G.: *Schule des Denkens*, Francke 1995[4], S. 5 ff.

## (1) VERSTEHEN DER AUFGABE + (2) AUSDENKEN EINES PLANS

- Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!
- Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte oder allgemeinere, oder spezielle, oder analoge Aufgabe denken? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten?...
- Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen?
- Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

Polya, G.: *Schule des Denkens*, Francke 1995$^{4}$, S. 5 ff.

- Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so ***kontrolliere jeden Schritt***. Kannst Du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, dass er richtig ist?

Polya, G.: *Schule des Denkens*, Francke 1995[4], S. 5 ff.

- Kannst Du das ***Resultat kontrollieren***? Kannst Du den Beweis kontrollieren?
- Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst Du es auf den ersten Blick sehen?
- Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?

Polya, G.: *Schule des Denkens*, Francke 1995[4], S. 5 ff.

## Kartenhausaufgabe

## Kartenhausaufgabe

Aus Karten soll ein Kartenhaus gebaut werden.

a) Wie viele Etagen kann man mit einem normalen Kartenspiel mit 32 Karten bauen?
b) Wie kommt man mit einem amerikanischen Blatt (54 Karten)?
c) Wie viel Karten benötigt man für ein 100 Etagen hohes Kartenhaus?
d) Wie viel Karten benötigt man für ein beliebig hohes Kartenhaus?

***Was ist bekannt?*** Die Anzahl der Karten oder Etagen.

***Was ist gegeben?*** Die Anzahl der Karten (32 bzw. 54) oder die Anzahl der Etagen.

***Wie lautet die Bedingung?*** Das Konstruktionsprinzip: Von oben nach unten kommen in jeder Etage Karten dazu. Die unterste Etage besitzt keine Bodenkarten.

*Zeichne eine Figur!*

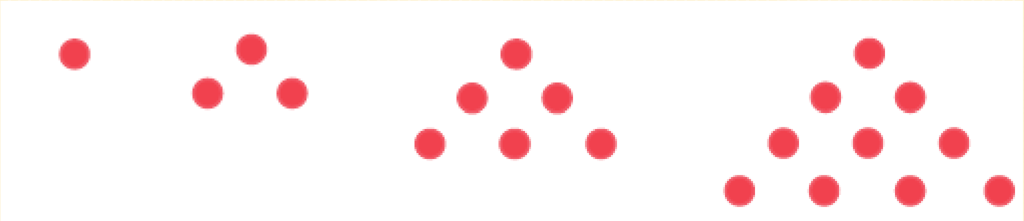
*Führe passende Bezeichnungen ein!*

$k=2$ $k=7$ $k=15$ $k=26$

$e$ : Anzahl der Etagen $k$: Anzahl der Karten

*Kennst Du eine ähnliche/ verwandte Aufgabe?*

Dreieckszahlen:



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$

$d = 1$ $d = 3$ $d = 6$ $d = 10$

$d(1) = 1$ $d(2) = 1 + 2 = 3$ $d(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

eventuell mit der Gaußschen Summenformel:

$$d(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

*Würdest Du ein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?*

***Kannst Du das Resultat der anderen Aufgaben verwenden?***

Jedem Punkt *n* der Dreieckszahlen entspricht ein Dreieck aus drei Karten.

***Kontrolliere jeden Schritt!***

*Kannst du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist?*

- $k^*(e) = 3 \cdot d(n)$

Jedem „Punkt“ $d$ einer Dreieckszahl entsprechen drei Karten des Kartenhauses (mit den Ergänzungen in der unteren Etage, daher $k^*$)

- $k(e) = 3 \cdot d(e) - e$
- $k(e) = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + e) - e$

eventuell mit der Gaußschen Summenformel:

- $k(e) = \frac{3 \cdot e \cdot (e+1)}{2} - e$
- vereinfacht: $k(e) = \frac{e \cdot (3e+1)}{2}$

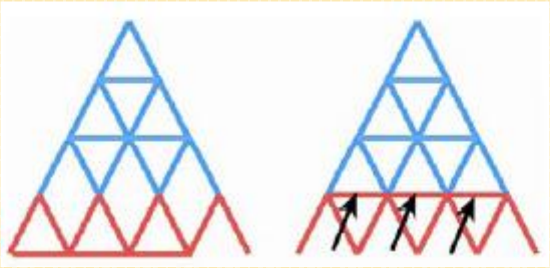
<u>Lösungen:</u>
32 Karten: 4 Etagen, es bleiben 6 Karten übrig
54 Karten: 5 Etagen, es bleiben 14 Karten übrig
100 Etagen: 15050 Karten

***Kannst Du das Resultat kontrollieren?***

Die ersten zwei Ergebnisse können durch Zeichnung überprüft werden.

*Kannst Du das Resultat auf andere Weise ableiten?*

Rekursive Definition (es kommt mit jeder Etage immer $e$ volle Dreiecke, aus drei Karten, minus einer Karten hinzu):



$k(1) = 2$

$k(2) = k(1) + 2 \cdot 3 - 1 = 7$

$k(3) = k(2) + 3 \cdot 3 - 1 = 15$

$k(4) = k(3) + 4 \cdot 3 - 1 = 26$

...

$k(e) = k(e-1) + e \cdot 3 - 1$

Überlegungen...

Antworten...

4 Etagen kann man mit einem normalen Kartenspiel bauen.

6 Etagen kann man mit einem amerikanischen Blatt bauen.

1020 Karten braucht man für ein 100 Etagen hohes Karten-
haus.

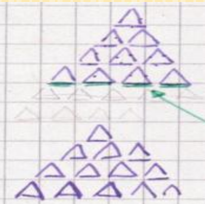
Aus 20400 karten kann man ein 2000 Etagen hohes Kartenhaus
bauen.

54 k = 6E  3k = 1E  54k − 3k = 51k  51k = 5E  51 · 20 = 1020 1?

5 · 20 = 100

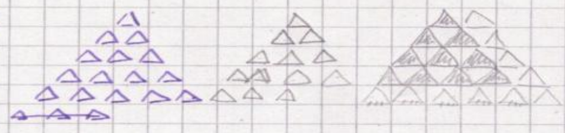
1020 k = 100 E

1)



Mit einem normalen Kartenspiel kann man 4 Etagen hoch bauen. Es bleiben 2 Karte übrig, es könnten aber auch 6 Karten übrig bleiben, wenn man in der untersten Etage keinen „Boden" legt.

2)



14 · 3 = 42
15 · 3 = 45

Mit einem ammerikanischen Kartenspielblatt erreicht man 5 Etagen. Wenn man noch 3 zusätzliche Karten hätte, würde man die 6. Etage auch noch bauen können. Bleibt es jedoch bei 54 Spielkarten, bleiben 14 übrig, wenn die unterste Reihe keine Böden bekommt. Steht die unterste Etage stabil auf Böden, bleiben nur 9 Karten übrig.

3)

| Etagen | benötigte Karten |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | +2 · 3 = 9 |
| 3 | +3 · 3 = 18 |
| 4 | +4 · 3 = 30 |
| 5 | +5 · 3 = 45 |
| 6 | 63 |
| 7 | 84 |
| 8 | 108 |
| 9 | |
| 10 | |
| 11 | |

Für 100 Etagen braucht man 15.000 Karten.

~~n + n · 3 = benötigte Karten~~

~~Für jede neue Etage braucht man noch einmal 1 so viele Karten wie bei der vorigen Etage.~~

4 – 30
5 – 45

Welche Merkmale lassen eine Aufgabe zu einer Problemlöseaufgabe werden?

# 4. CHARAKTERISTIK VON PROBLENLÖSEAUFGABEN

## FORMALE KRITERIEN

- Bekanntheitsgrad
- Mathematische Komplexität
- Darstellungsebene
- Informationsangebot
- Erkennbarkeit des Aufgabetyps
- Reversibilität

Zech, Friedrich: *Grundkurs Mathematikdidaktik*. Weinheim, Basel 1996[8] , S. 328 ff.

## INHALTLICHE KRITERIEN

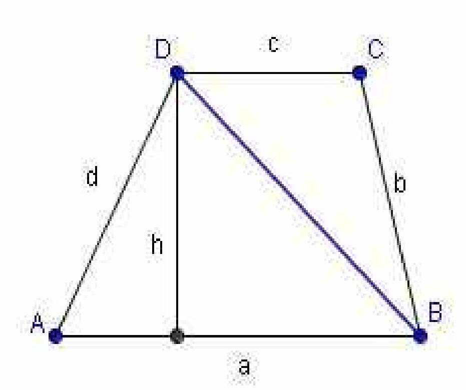
- Muster und Strukturen
- Problemhaltige Text- und Sachaufgaben
- Logik, Spiele und andere Aufgaben
- Geometrie

Grassmann, M.; Heinze A.: *Erkennen und Fördern mathematisch begabter Kinder.* Westermann, 2009, S. 55 f.

Beispiel:

1a) Am Donnerstag regnete es 120 Min. Wie lange regnete es nicht?

1b) Am Freitag regnete es 2 Std. Wie lange schien die Sonne?




...zurück zum **Flächeninhalt des Trapezes**

*Lösung:*

- ✓ Zerlegen eines Vielecks in Teilvielecke

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

- ✓ Berechnen des Flächeninhaltes eines Vielecks aus den Flächeninhalten der Teilvielecken bei einer Zerlegung
- ✓ Berechnen des Flächeninhaltes eines Parallelogramms aus einer Seitenlänge und der zugehörigen Höhe mit Hilfe der Flächeninhaltsformel
- ✓ Berechnen des Flächeninhalts eines Dreiecks aus einer Seitenlänge und der zugehörigen Höhe mit Hilfe der Flächeninhaltsformel

Beispiel:

Bei einer Geburtstagsfeier kommen n Kinder zusammen. Jedes Kind gibt jedem anderen Kind zur Begrüßung die Hand. Wie oft werden Hände geschüttelt?

*Lösung:*

| „Arithmetischer“ Ansatz | Händeschütteln | „Geometrischer“ Ansatz |
|---|---|---|
| 1. Kind kommt | | Jedes Kind bildet die Ecke eines $n$-Ecks |
| 2. Kind kommt | \| | Händeschütteln wird zum Verbinden von zwei Ecken |
| 3. Kind kommt | \| \| | Frage: Wie viel Seiten und Diagonalen? |
| ... | | |
| $n$. tes Kind kommt | $n$ -1 | Von jedem Punkt gehen $n$-1 Strecken aus: $n(n-1)$ |
| Ergebnis: $1 + 2 + ... + n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$ | | Doppelt gezählt: $\frac{n(n-1)}{2}$ |

Beispiel:

In einem Käfig sind Fasanen und Kaninchen.

Man zählt 24 Köpfe und 62 Beine.

Wie viele Tiere von jeder Art sind im Käfig?

*Lösung:*

Gezieltes Variieren: 24 Köpfe konstant, Beine variabel:

12 F und 12 K: $24 + 48 = 72$

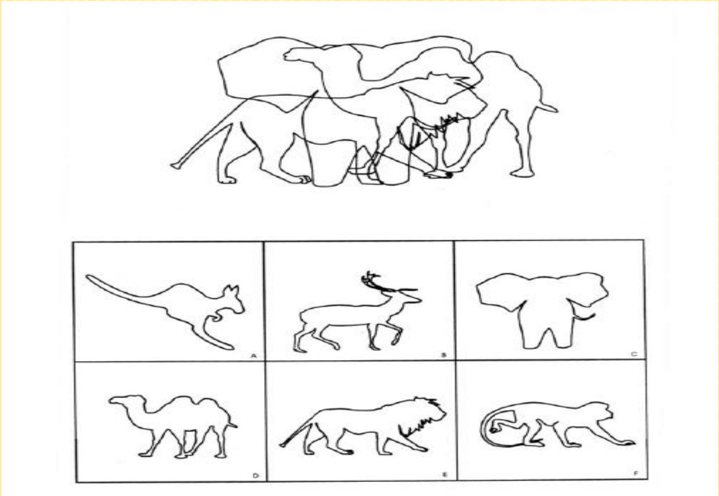
10 Beine zu viel $= 2$ K $+ 1$ F zu viel

11 F und 10 K: $22 + 40 = 62$ Beine

# CHARAKTERISTIK VON PROBLEMLÖSEAUFGABEN ERKENNBARKEIT DES AUFGABENTYPS

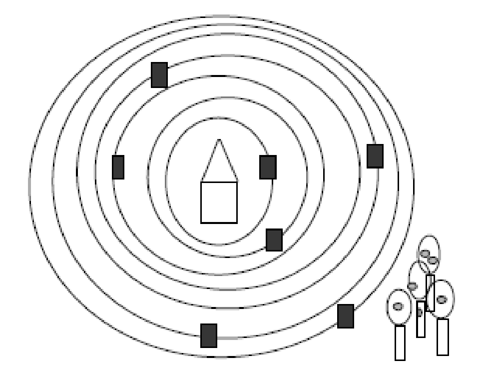
<u>Beispiele:</u>

1. Eine (geometrische) Figur aus dem Hintergrund herauslösen



2. In einer Gleichung die binomische Formel identifizieren

$12x -(-x - 24) + x^2 = x - 12 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow (x + 6)^2$



Aufgabe: Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um mit seiner Ernte in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig.

Wie viele hatte er am Anfang?

*Lösung:*

Ende: 1
Davor: 4
Davor: 10
Davor: (10+1)*2=22

46;94;190;382

# 5. LITERATUR


- Polya, G.: *Schule des Denkens*. Tübingen und Basel, Francke 1995[4]
- Grassmann, M.; Heinze A.: *Erkennen und Fördern mathematisch begabter Kinder.* Westermann, 2009.
- Leuders, T.: *Mathematikdidaktik – Praxisbuch für die Sekundarstufe I und II.* Cornelsen Verlag Scriptor, Berlin 2003
- Winter, H.: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht.* Vieweg Verlag, Braunschweig 1989.
- Zech, F.: *Grundkurs Mathematikdidaktik*. 8. Aufl., Weinheim, Basel 1996[8]

# Vielen Dank

für

Aufmerksamkeit

&

aktive Teilnahme