Logische Grundlagen

Junktoren_

Dörthe Brachwitz

Was erwartet Euch heute?

Fachliches Wissen

- **Definitionen der Begriffe** Aussage, Aussageformen, Junktoren (*Negation, Konjunktion, Disjunktion, Alternative, Subjunktion (Implikation), Bisubjunktion (Äquivalenz), Tautologie, Kontradiktion),* aussagenlogische Gesetze

Unterrichtsbezug

- Rahmenlehrplan der Heinrich-Hertz-Oberschule (Klasse 8)
- Vorstellung der Stoffverteilung für aussagenlogischen Teil (Ziele, Inhalte, Motivation/Einstieg, Verlauf)

Diskussion

- Behandlung des Stoffgebiets in allen Klassenstufen?

Aussagen, Aussageformen, Junktoren

Eine **Aussage** ist ein sprachliches Gebilde, das vom Inhalt her wahr oder falsch ist.

Eine **Aussageform** ist ein sprachliches Gebilde, das mindestens eine Variable enthält und nach geeigneter Ersetzung in eine (wahre oder falsche) Aussage übergeht. Eine solche Ersetzung wird Belegung der Variablen genannt.

Junktoren sind Worte oder Zeichen, die Teilaussagen so zu einer Gesamtaussage verknüpfen, dass der Wahrheitswert der Gesamtaussage ausschließlich von den Wahrheitswerten der beteiligten Teilaussagen abhängt.

Zeichen: $\neg \ \wedge \ \vee \ \rightarrow \ \leftrightarrow$

in aussagenlogischen Ausdrücken kommen folgende Zeichen vor:

- Aussagevariablen, im Allg. mit kleinen lat. Buchstaben bezeichnet
- aussagenlogische Junktoren $\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$
- technische Zeichen, zu denen Klammern gehören

$\Rightarrow$ willkürliche Kombinationen dieser Zeichen könnte zu sinnlosen Ausdrücken führen

um dies auszuschließen, werden folgende Regeln festgelegt:

- jede Aussagenvariable ist eine Aussageform
- wenn A eine Aussageform ist, so ist auch $\neg A$ eine Aussageform
- wenn A und B Aussageformen sind, so sind auch $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ Aussageformen

Konventionen:

- $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$
- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$ und $\vee$

Negation

Die **Negation** ¬A ist eine Aussagenverknüpfung, die genau dann falsch ist, wenn A wahr ist, und die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Wahrheitswertetabelle:

A	**¬A**
w	f
f	w

Beispiel:

A: „143 ist durch 13 teilbar.“

¬A: „143 ist nicht durch 13 teilbar“

Konjunktion

Die **Konjunktion** $A \wedge B$ ist eine Aussagenverknüpfung, die genau dann wahr ist, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

Wahrheitswertetabelle:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiel:

„9 ist eine Quadratzahl, und 12 ist durch 4 teilbar“

Disjunktion

Die **Disjunktion** A∨B ist eine Aussagenverknüpfung, die genau dann falsch ist, wenn sowohl A als auch B falsch sind.

Wahrheitswertetabelle:

A	**B**	**A ∨ B**
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beispiel:

„Die Gerade g schneidet die Gerade h oder die Gerade l.“

Alternative

Die **Alternative** A$\vee$B (Junktor mit einem Pünktchen versehen) ist eine Aussagenverknüpfung, die genau dann wahr ist, wenn A und B verschiedene Wahrheitswerte haben.

Wahrheitswertetabelle:

A	**B**	**A $\vee$ B**
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beispiel:

„Der Punkt P liegt entweder auf dem Kreis k oder im Inneren des Kreises k.“

Subjunktion

Die **Subjunktion** $A \to B$ ist eine Aussagenverknüpfung, die genau dann falsch ist, wenn A wahr und B falsch ist.

Wahrheitswertetabelle:

A	**B**	**$A \to B$**
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Beispiel:

„Wenn 4 ein Teiler von n ist, so ist auch 2 ein Teiler von n.“

Implikation vs. Subjunktion

- Implikation ist ein metasprachlicher Ausdruck im Zusammenhang mit dem Folgerungsbegriff und wird mit ‚$\Rightarrow$' gekennzeichnet
- hingegen ist die Subjunktion eine Aussagenverknüpfung und gehört zur Objektsprache
- man spricht von einer logischen Folgerung oder Implikation nur dann, wenn sich aus einer wahren Aussage immer nur eine wahre Aussage ergibt
- „A ist hinreichende Bedingung für B" bzw. „B ist notwendige Bedingung für A"
- die Subjunktion ist aber auch erklärt, wenn das Vorderglied A wahr und das Hinterglied B falsch ist
- Problematik mit Implikation (Voraussetzung und Behauptung)

Bisubjunktion

Die **Bisubjunktion** A↔B ist eine Aussagenverbindung, die genau dann wahr ist, wenn A und B die gleichen Wahrheitswerte haben.

Wahrheitswertetabelle:

A	B	A ↔ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Beispiel:

„Genau dann, wenn ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c in C rechtwinklig ist, so gilt für die Seiten der Satz des Pythagoras.“

Bisubjunktion vs. Äquivalenz

vgl. dazu „Implikation vs. Subjunktion“

(A ist nicht nur hinreichende, sondern auch notwendige Bedingung für B)

Tautologie

Die **Tautologie** ist eine Aussageform, die bei jeder Belegung der in ihr vorkommenden Aussagevariablen mit Wahrheitswerten stets wahr ist.

Kurz: $A \vee (\neg A)$

Wahrheitswertetabelle:

A	¬A	A ∨ (¬ A)
w	f	w
f	w	w

Beispiel:

„Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, so ändert sich das Wetter, oder es bleibt, wie es ist.“

Kontradiktion

Die **Kontradiktion** ist eine Aussageform, die bei jeder Belegung der in ihr vorkommenden Aussagevariablen mit Wahrheitswerten stets falsch ist.

Kurz: $A \wedge (\neg A)$

Wahrheitswertetabelle:

A	**¬A**	**A ∧ (¬ A)**
w	f	f
f	w	f

Aussagenlogische Gesetze (Tautologien)

Gesetz von der doppelten Negation	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch	$\neg(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow w$
Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten	$\neg A \vee A \Leftrightarrow w$
Gesetz von der Identität	$A \Rightarrow A$
Erstes Gesetz von De Morgan (Negation einer Disjunktion)	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
Zweites Gesetz von De Morgan (Negation einer Konjunktion)	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
Negationsgesetz der Subjunktion	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$
Gesetz von der Kontraposition	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

- für Konjunktion und Disjunktion gelten Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze, Idempotenzgesetze

Heinrich-Hertz-Gymnasium

- Schule mit besonderer pädagogischer Prägung mit mathematisch-naturwissenschaftlichem Profil

<u>Ziele des Mathematikunterrichts:</u>

- Herausforderung, Vertiefung und Erweiterung der Fähigkeiten der Schüler

Neben RLP für Berlin gibt es „Ergänzungsplan“ zur Weiterentwicklung allg. Fähigkeiten wie:

- logische Strukturen analysieren und aufdecken können
- Aussagen logisch strukturieren und Beweisideen selbst finden können
- funktionale Abhängigkeiten entdecken und selbst formulieren können

„Ergänzungsplan“

Klasse 7:

- Elemente der Mengenlehre
- Ergänzungen zur Geometrie

Klasse 8:

- Elemente der mathematischen Logik
- Elemente der Teilbarkeitslehre
- Betragsgleichungen und –funktionen
- Ergänzungen zur Geometrie

Klasse 9:

- Vertiefungen zu Gleichungssystemen
- Quadratische Funktionen
- Elemente der Kombinatorik

Klasse 10:

- Beweisverfahren vollständige Induktion
- Ausbau der Gleichungslehre
- Darstellung von Körpern

Unterrichtsplanung

Thema: Aussagenlogik

Zeitumfang: 10 bis 15 Unterrichtsstunden

Inhalte/Ziele:

- Vermittlung/Verständnis der Begriffe, Definitionen: Aussage, Aussageformen, Negation, Konjunktion, Disjunktion, Alternative, Implikation, Äquivalenz
- logische Bestandteile der Sprache der Mathematik richtig verstehen und gebrauchen z.B. *nicht, kein, wenn-so, entweder-oder,…*
- Kenntnis von Gesetzen und Formeln (aussagenlogische Gesetze z.B. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$) und Beherrschung logischer Grundregeln
- Aufstellen von Wahrheitswertetabellen u.a. zum Beweisen von allgemeingültigen Äquivalenzen
- Schüler kennen Unterschied zwischen Konjunktion und Disjunktion/Alternative
- Schüler kennen Unterschied zwischen Implikation, Äquivalenzen
- Schüler können Ausdrücke mit gleicher logischer Struktur, aber unterschiedl. sprachl. Formulierung als „gleichbedeutend“ erkennen
- Schüler können Aussagen bzw. Aussageformen verneinen
- Schüler ist der Bezug zur Mengenlehre bewusst (kennen Begriffe: Schnitt-, Vereinigungs- und Lösungsmenge)

Unterrichtseinstieg/Motivation

Einstieg: Umgangssprache vs. Sprache der Logik

- Besprechung von Aussagen zur Bedeutung der Wörter „und“ und „oder“ in der Umgangssprache

⇒ KONFLIKT: Wie kann man in der Mathematik eindeutige Aussagen treffen?

Umgangssprache:

- kaum geeignet, Aussagen eindeutig und kurz zu formulieren, da häufig unexakt und mehrdeutig

Mathematische Logik:

- Einführung von Symbolen mit genau definierter Bedeutung zur exakten und eindeutigen Formulierung von Aussagen
- Vereinfachung durch Einführung von Regeln für den Umgang mit Zeichen
- Unterscheidung von Objekt- und Metasprache

Unterrichtsverlauf

- Einstieg/Motivation
- Begriffseinführung: Aussage, Aussageform, Schnittmenge, Vereinigungsmenge, Lösungsmenge und Übungen zur Festigung
- Einführung: Konjunktion, Disjunktion/Alternative von Aussagen/Aussageformen und Erfassung in Wahrheitswertetabellen
- Einführung: Negation
- Einführung: Subjunktion vs. Implikation und Bisubjunktion vs. Äquivalenz

Methoden:

- Lehrervortrag
- eigenständiges Üben zur Festigung der Begriffe
- Memory: Gruppenarbeit
- abschließende Leistungskontrollen

Diskussion

„Sollte das Stoffgebiet „Aussagenlogik“ verbindlich für alle Klassen behandelt werden?“

„Für welche anderen Stoffgebiete der Sekundarstufe I würden aussagenlogische Kenntnisse von Vorteil sein?“

Literatur

- Bock/ Walsch: *Zum logischen Denken im Mathematikunterricht*. 1. Auflage. Berlin 1975.
- Schick, Karl: *Aussagenlogik*. *Eine leichtverständliche Einführung in elementare Probleme der modernen Logik*. Freiburg 1971.
- Müller-Fonfara, Robert: *Mathematik verständlich*. München 2005.

<u>Schulbücher</u>:

- Brennpunkt Algebra 8, Schroedel-Verlag
- PLUS Mathematisches Unterrichtswerk +8, Schöningh-Verlag
- Mathematik 8. Schuljahr, Cornelsen-Verlag

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin: Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I. Mathematik. 1. Auflage. Berlin 2006.

<u>Internet</u>:

http://www.hhgym.de