Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

(Leistungsüberprüfung am 10.04.2001)

1. Es sei X eine mit dem Parameter λ exponential-verteilte Zufallsgröße.

   a) Man berechne das 0,95-Quantil der Verteilung X in Abhängigkeit von λ.

   b) Man berechne die Dichte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von $Y = \sqrt{X}$.

   (4 Punkte)

2. Aus einer gleichmäßig auf $\{0, ..., 99\}$ verteilten Zufallszahlentabelle werden auf gut Glück und unabhängig voneinander zwei Zahlen X_1, X_2 ausgewählt. Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $Y = \max(X_1, X_2)$? Man berechne EY.
   (6 Punkte)

3. Bei einem Langsteckenflug wird jedem der 400 Passagiere ein Mittagessen angeboten. Er hat die Wahl zwischen Essen I und Essen II.

   a) Unter der Annahme, dass alle Passagiere ihre Wahl unabhängig voneinander treffen und sich jeder mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,5$ für Essen I bzw. Essen II entscheidet, berechne man annähernd die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jeder Wunsch berücksichtigt werden kann, wenn insgesamt vom Essen I 220 und vom Essen II 210 Portionen an Bord sind.

   b) Angenommen von jeder Art Essen werden gleichviel Portionen an Bord genommen. Wieviele Portionen müßte man von jedem mindestens zur Verfügung haben, um mit Sicherheit (bzw. mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0,95$) alle Wünsche zu erfüllen?

   (13 Punkte)

4. a) Zwei reguläre Spielwürfel werden unabhängig voneinander geworfen. die erscheinenden Augenzahlen werden mit W_1 bzw. W_2 bezeichnet. Sind die Zufallsgrößen $U = W_1 + W_2$ und $V = W_1 - W_2$ unabhängig voneinander? Man berechne ihren Korrelationskoeffizienten $\rho = \rho(U, V)$.

   b) Beim Werfen eines regulären Spielwürfels bezeichnet X die obenauf und Y die zuunters erscheinende Augenzahl.
   Geben Sie in einer Kontingenztafel die gemeinsame Verteilung von (X, Y) an. Wie groß ist der Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y)$?

   (8 Punkte)

5. Eine (reguläre) Münze wird von einer Person solange (unabhängig voneinander) geworfen, bis zum ersten Mal Zahl erscheint. Die Anzahl der Würfe werde mit N bezeichnet. Danach wirft diese Person einen regulären Würfel N mal unabhängig voneinander und bestimmt die Summe S_N aller gewürfelten Augenzahlen. Nur der Wert von S_N wird uns mitgeteilt.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für $\{N = 2\}$ unter der Bedingung $\{S_N = 3\}$?
   (3 Punkte)

6. Gegen einen Einsatz von 1 DM erhalten Sie beim Werfen zweier (regulärer) Spielwürfel das k-fache des Einsatzes ausgezahlt, falls die Summe der Augenzahlen größer oder gleich zehn ist (k natürliche Zahl). Anderenfalls verfällt Ihr Einsatz.
   Bei welchem Wert k_0 von k ist das Spiel fair? (Begründen Sie Ihre Aussage.) Wie groß sind Erwartungswert und Varianz Ihres Gesamtnettogewinns, falls Sie das Spiel n mal (unabhängig voneinander) wiederholen?
   (6 Punkte)

7. Für Studenten des Studienganges Statistik:
   Angenommen, in der Aufgabe 6 ist k gleich 12. Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung Ihres Gesamtnettogewinnes, falls Sie das Spiel n mal (unabhängig voneinander) wiederholen?
   Geben Sie annähernd die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Sie nach $n = 100$ Spielen einen positiven Gesamtnettogewinn erzielt haben.
   (6 Punkte)

Hinweis: In einer der Aufgaben kann man folgende Formel benutzen:

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$