Kombinatorik

Elke Warmuth

Humboldt-Universität Berlin

WS 2008/09

Zählen (Kombinatorik)

Laplace-Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Hans Freudenthal: „Einfache Kombinatorik ist das Rückgrat elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung."

- Probleme gedanklich ordnen
- systematisieren
- mathematisieren
- enaktiv, ikonisch, symbolisch
- Fehlvorstellungen erkennen, überwinden

Fehlvorstellungen

Quelle: A. Tversky; D. Kahnemann: Availiability: A heuristic for judging frequency and probability. In: Cognitive Psychology 5 (1974), 207-233

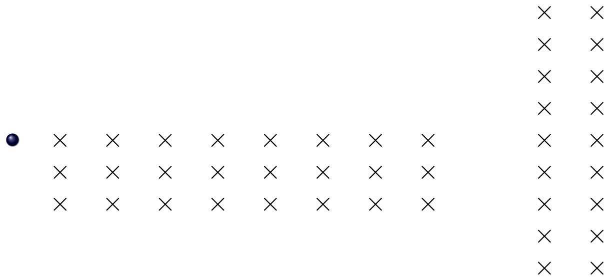
- Lassen sich in einer Gruppe von 10 Personen mehr 8er Ausschüsse oder mehr 2-er Ausschüsse bilden?

$$\begin{array}{cccccccccc} \times & \times\| & \times & \times\| & \times & \times\| & \times & \times\| & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times\| & \times & \times \end{array}$$

Lösung:

$$\binom{10}{2} = \binom{10}{8}$$

verbal: 2 auswählen ist gleichbedeutend mit 8 nicht auswählen



Weg im Gitter: Streckenzug, der von oben nach unten verläuft und in jeder Zeile durch genau einen Gitterpunkt $\times$ geht

Gibt es mehr Wege im linken Gitter oder im rechten Gitter?

Lösung: links: 8^3, rechts: 2^9, also gleiche Anzahl

- $$\begin{array}{cccccc} \times & \times & \circ & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \circ & \times \\ \circ & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \circ \\ \times & \times & \times & \circ & \times & \times \\ \times & \circ & \times & \times & \times & \times \end{array}$$

  Weg im Gitter: Streckenzug, der von oben nach unten verläuft und in jeder Zeile durch genau einen Gitterpunkt $\times$ oder $\circ$ geht

  Gibt es mehr Wege mit genau 6 Symbolen $\times$ oder mehr Wege mit 5 Symbolen $\times$ und einem Symbol $\circ$

  Lösung: 6 mal $\times$: 5^6, 5 mal $\times$ und einmal $\circ$: $6 \cdot 5^5$,
  also mehr mit 5 mal $\times$ und einmal $\circ$

Klasse 1/2

Anforderungen	Inhalte
einfache kombinatorische Aufgaben lösen	Spiele Verständnis von Wahrscheinlichkeit: ist möglich (aber nicht sicher), ist sicher, ist unmöglich

Klasse 3/4

Anforderungen	Inhalte
Anordnungen nutzen, um die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen einzuschätzen	genauso wahrscheinlich wie, die Chance ist größer als, in 2 von 8 Fällen, kommt häufiger vor als

Klasse 5/6

Anforderungen	Inhalte
Wahrscheinlichkeit mithilfe der Bruchdarstellung angeben und vergleichen	Angabe von Wahrscheinlichkeiten in Form von Brüchen Gerechtigkeit von Spielen Gewinnchancen

Klasse 7/8

Kompetenzen

- Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei einfachen Zufallsexperimenten
- Bestimmen von Anzahlen durch systematisches Zählen

Tätigkeiten

✓

- berechnen Laplace-Wahrscheinlichkeiten durch Abzählen der für das Ereignis günstigen Fälle und der insgesamt möglichen Fälle,
- nutzen geeignete Modelle (z. B. Abzählbäume) zum Abzählen.

Tätigkeiten

✓✓

- begründen das verwendete Abzählverfahren,
- berechnen Laplace-Wahrscheinlichkeiten durch geschicktes Abzählen auf Grundlage des allgemeinen Zählprinzips.

Klasse 9/10

Kompetenzen

- Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten
- Verwenden des Urnenmodells zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten

Tätigkeiten

✓

- beschreiben die Ergebnismenge 2- und 3-stufiger Zufallsexperimente durch Baumdiagramme.

Tätigkeiten

✓✓

- berechnen Laplace-Wahrscheinlichkeiten durch Spezialisierung des allgemeinen Zählprinzips auf Grundlage des Urnenmodells („Ziehen mit und ohne Zurücklegen“),
- begründen die kombinatorischen Grundmodelle („Ziehen mit und ohne Zurücklegen“) auf Grundlage des allgemeinen Zählprinzips.

Tätigkeiten

✓✓✓

- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe des Urnenmodells,
- verwenden zur Berechnung auch Fakultäten und Binomialkoeffizienten.

Einführungsphase

Im 1. Halbjahr des Fundamentalbereichs Stochastik mit den Inhalten Beschreibende Statistik, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramme, Pfadregeln und Kombinatorische Zählprinzipien.
Außerdem im 1. Halbjahr Koordinatengeometrie und Funktionen.

Eingangsvoraussetzungen (Kombinatorik) zur Qualifikationsphase

- bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Laplace-Regel, Baumdiagrammen sowie Pfadregeln und wenden diese an
- nutzen Binomialverteilung (Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung), Bernoulli-Ketten, Binomialkoeffizienten und Fakultäten zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in Anwendungskontexten

Der zweite Punkt passt nicht zum Rahmenplan Sek I.

Qualifikationsphase

Abschlussorientierte Standards

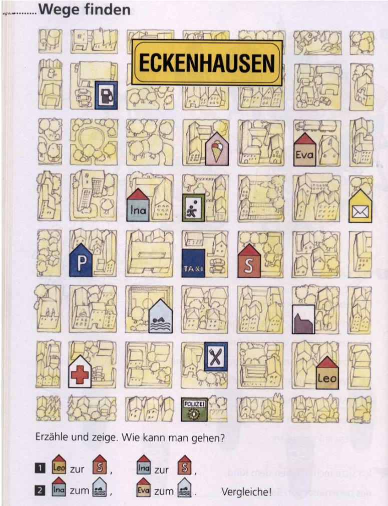
- wenden kombinatorische Hilfsmittel, Urnenmodelle, Baumdiagramme und Vierfeldertafeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in realen Kontexten an.

ma-2/Ma-2: Analysis/Stochastik

- Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten (kombinatorische Hilfsmittel, Urnenmodelle, Baumdiagramme und Vierfeldertafeln)
- Binomialverteilung (Formel von Bernoulli)

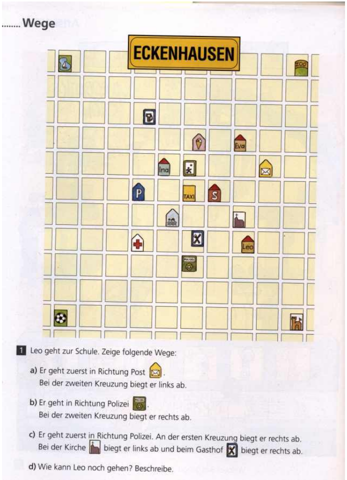
Merkmale der Berücksichtigung von „Kombinatorik“

- spiraliger Aufbau, in der Grundschule beginnend
- vielfältige Veranschaulichungen (Anordnungen, Baumdiagramme, Urnenmodelle)
- kein selbständiges Stoffgebiet, sondern eingebunden in das jeweilige Thema
- aufgebaut auf dem „Allgemeinen Zählprinzip“ (Produktregel der Kombinatorik)
- kein Ballast an Fachbegriffen (Kombinationen, Variationen, ...)
  in der Sek II: Fakultäten, Binomialkoeffizienten



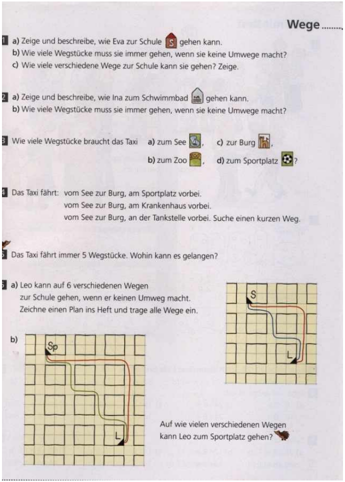
Quelle: Das Zahlenbuch 1, Wittmann/Müller, Klett Verlag, 2004

(kürzeste) Wege finden, mehrere Möglichkeiten, Anzahlen vergleichen



Quelle: Das Zahlenbuch 2, Wittmann/Müller, Klett Verlag, 2004

Wege nach Beschreibung finden, neue Wege finden, noch nicht alle Möglichkeiten



Wege

1 a) Zeige und beschreibe, wie Eva zur Schule gehen kann.
b) Wie viele Wegstücke muss sie immer gehen, wenn sie keine Umwege macht?
c) Wie viele verschiedene Wege zur Schule kann sie gehen? Zeige.

2 a) Zeige und beschreibe, wie Ina zum Schwimmbad gehen kann.
b) Wie viele Wegstücke muss sie immer gehen, wenn sie keine Umwege macht?

3 Wie viele Wegstücke braucht das Taxi a) zum See, c) zur Burg, b) zum Zoo, d) zum Sportplatz?

4 Das Taxi fährt: vom See zur Burg, am Sportplatz vorbei.
vom See zur Burg, am Krankenhaus vorbei.
vom See zur Burg, an der Tankstelle vorbei. Suche einen kurzen Weg.

5 Das Taxi fährt immer 5 Wegstücke. Wohin kann es gelangen?

6 a) Leo kann auf 6 verschiedenen Wegen zur Schule gehen, wenn er keinen Umweg macht. Zeichne einen Plan ins Heft und trage alle Wege ein.

b) Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann Leo zum Sportplatz gehen?

Quelle: Das Zahlenbuch 2, Wittmann/Müller, Klett Verlag, 2004

Vielfältige Übungen zu Wegen: Wege finden, Eigenschaften der Wege, kurze Wege, Wege einzeichnen

Beispiel Klasse 4: Beim Würfeln mit zwei Spielwürfeln wird die Summe 7 wesentlich häufiger gewürfelt als die Summe 12. Woran liegt das?

Quelle: KMK Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich vom 15.10.2004, AB III

mögliche Lösung:

					6+1					
				5+1	5+2	6+2				
			4+1	4+2	4+3	5+3	6+3			
		3+1	3+2	3+3	3+4	4+4	5+4	6+4		
	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	
1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

- ikonische Variante: mit richtigen bunten Würfeln legen
- Muster in der Tabelle beschreiben
- Experimentieren und Daten auswerten, als Spiel nutzen

Leibniz' Irrtum

- Leibniz (1646-1716) – berühmter deutscher Universalgelehrter
- Spiel mit zwei Würfeln: Ist die Augensumme 11 genauso wahrscheinlich wie die Augensumme 12?
- Leibniz: $11 = 5 + 6$ und $12 = 6 + 6$, also je eine Möglichkeit der Zerlegung und somit gleichwahrscheinlich.
- Wo steckt der Fehler? Wie ist es richtig?

Frage an Galilei

- Galilei (1564-1642) – italienischer Mathematiker, Physiker und Astronom
- Frage: Wieso ist beim Werfen von 3 Würfeln die Augensumme 10 leichter zu erreichen als die Augensumme 9?
- Mögliche Impulse: Finde alle Zerlegungen der Summen 9 und 10 mit Würfelzahlen. Sind sie alle genauso wahrscheinlich?
- Beantworte die Frage, die an Galilei gerichtet wurde.
- Lösung:

9	10
$1 + 2 + 6$	$1 + 3 + 6$
$1 + 3 + 5$	$1 + 4 + 5$
$1 + 4 + 4$	$2 + 2 + 6$
$2 + 2 + 5$	$2 + 3 + 5$
$2 + 3 + 4$	$2 + 4 + 4$
$3 + 3 + 3$	$3 + 3 + 4$

Nur Vergleich von Fällen keine Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Fazit:

- Stochastische Fragestellungen durchdringen den Mathematikunterricht in der Grundschule, sind kein eigenes Stoffgebiet.
- Schüler für Zufall sensibilisieren
- Durch praktisches Tun stochastische Erfahrungen sammeln und ordnen
- Beitrag zur Welterschließung leisten: Zufall erfahren, akzeptieren, darüber sprechen

Propädeutik (griech. pró vor, paideúein unterrichten) – Vorbildung, Vorübung, Vorunterricht, Einführung in eine Wissenschaft

Telefonnummer

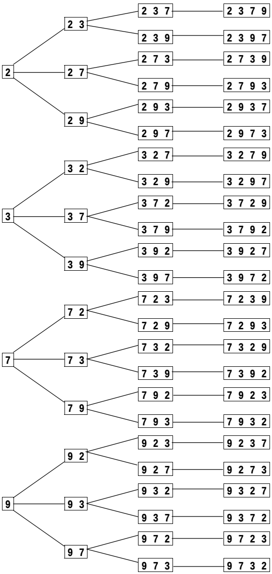
Quelle: H. Winter: Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule. In: DdM 1976, Heft 1, S. 22-37, dort für

9-11jährige Schüler, vielfach erprobt

- „a) Situationsbeschreibung: Bernd möchte seine Freundin Elke anrufen (Ortsgespräch 0,25 DM), hat aber die Telefonnummer vergessen. Er erinnert sich nur noch daran, dass die Nummer vierstellig war und die Ziffern 2, 3, 7 und 9 vorkamen. Soll er einmal probieren?“
- b) Diskussion ...

- c) Aufsuchen aller Möglichkeiten: Schreibt doch einmal alle vierstelligen Nummern mit den Ziffern 2, 3, 7, 9 auf.
  Schülerfrage: „Wie rechnet man das aus?“ ...
- d) Modellierung im Urnenmodell:
  - Lose mit den Ziffern 2, 3, 7, 9 in einen Kasten
  - Ziehen ohne Zurücklegen
  - Aktivitäten:
    Welche Ziffer können wir zuerst ziehen? ...
    Wenn wir beim ersten Mal 7 ziehen, *dann* können wir beim zweiten Mal 2, 3 oder 9 ziehen. ...

- e) Darstellung im Baumdiagramm:
  - neues ikonisches Hilfsmittel $\rightarrow$ vorsichtig vorgehen
  - schrittweise: „Wir schreiben auf, was wir der Reihe nach wirklich *ziehen*.“
    — 7 — 2 — 3 — 9 $\rightarrow$ Ergebnis 7239
    — 2 — 3 — 9 — 7 $\rightarrow$ Ergebnis 2397
  - „Jetzt schreiben wir auf, was wir ziehen *könnten*.“
    Es folgt das komplette Baumdiagramm.
    D.h. erst werden die einzelnen Pfade und dann der ganze Baum entwickelt.


2
2 3
2 3 7
2 3 7 9
2 3 9
2 3 9 7
2 7
2 7 3
2 7 3 9
2 7 9
2 7 9 3
2 9
2 9 3
2 9 3 7
2 9 7
2 9 7 3
3
3 2
3 2 7
3 2 7 9
3 2 9
3 2 9 7
3 7
3 7 2
3 7 2 9
3 7 9
3 7 9 2
3 9
3 9 2
3 9 2 7
3 9 7
3 9 7 2
7
7 2
7 2 3
7 2 3 9
7 2 9
7 2 9 3
7 3
7 3 2
7 3 2 9
7 3 9
7 3 9 2
7 9
7 9 2
7 9 2 3
7 9 3
7 9 3 2
9
9 2
9 2 3
9 2 3 7
9 2 7
9 2 7 3
9 3
9 3 2
9 3 2 7
9 3 7
9 3 7 2
9 7
9 7 2
9 7 2 3
9 7 3
9 7 3 2

- Baumdiagramm muss angeeignet werden:
  - Zahl nennen und zugehörigen Pfad zeigen
  - Zahl endet auf 2, welche Pfade sind günstig
  - usw.
- f) Rückbezug zur Ausgangssituation:
  „Bernd will probieren, bis er Verbindung mit Elke hat. Wie viel Geld kostet das, wenn er ganz großes Glück hat? Wie viel Geld kostet das, wenn er ganz großes Pech hat?“
  „Bernd will dreimal probieren. Welche Nummern soll er wählen?“

- Variation
  - Variieren der Zahlen in der gegebenen Situation
  - Variieren der Situation
- Ziele
  - allgemeines Muster zu erkennen/verinnerlichen
  - verschiedene Situationen als Varianten dieses Musters erkennen

Beispiele:

- Nummer fängt mit 7 an (endet auf 2, hat n Ziffern, alle Ziffern von 0 bis 9 kommen in Frage, ...
- Analogien erkennen und Fragen stellen lernen
  - an einem Wettlauf nehmen 2 (3, 4, 5, ...) Sportler teil
  - 2 (3, 4, 5, ...) Briefe werden auf gut Glück in 2 (3, 4, 5, ...) adressierte Umschläge gesteckt
  - Wir wollen überprüfen, ob jemand das 1×1 gut kann oder nur rät. Er soll die Aufgabenkärtchen auf die Lösungskärtchen legen.

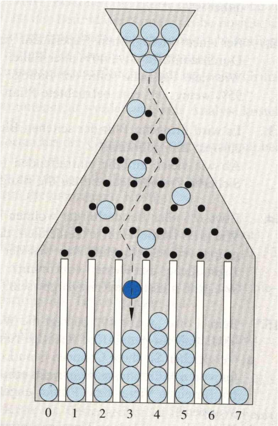
$7 \cdot 9$	$8 \cdot 6$	$6 \cdot 7$	$9 \cdot 9$	$8 \cdot 7$
48	56	63	81	42

Wie viel Glück müsste er haben, wenn er nur rät?

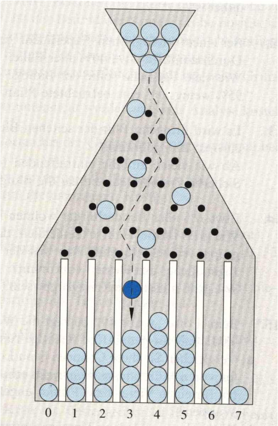
Galton-Brett

Quellen: Ch. Selter: Warum wird die Mitte bevorzugt? In: mathematik lehren 12, Oktober 1985, 10-11, dort 4. Kl.

In jeder Zeile trifft die Kugel auf ein Hindernis und wird nach links oder rechts abgelenkt.



- Eigenschaften entdecken
- handelnd und gedanklich
- darüber sprechen
- Zufall = Nichtvorhersagbarkeit und doch Regelmäßigkeit
- Mittenbevorzugung verstehen



Quelle: Stochastik, Berlin: Volk und Wissen, 1997

- Ziel: Modell finden und im Modell arbeiten
- Feinziel: Bernoulli-Kette der Länge 7 mit Erfolgswahrscheinlichkeit $0,5$
- Sprachregelung: Erfolg = rechts,
  Misserfolg = links
  Anzahl der Erfolge: $0, 1, \ldots, 7$
- Kugeln mit 0 Erfolgen landen ganz links,
  Kugeln mit drei Erfolgen landen im Fach mit der Nummer 3,
  Kugeln mit 7 Erfolgen landen ganz rechts,
  ...

- Wie viele Wege gibt es durch das Galton-Brett?
- Sind sie alle gleichwahrscheinlich? Warum?
- Wie viele Wege gibt es mit genau 3 Erfolgen?
  Äquivalent: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 7 Nagelreihen diejenigen 3 auszuwählen, in denen die Kugel nach rechts abgelenkt wird?
  Antwort: $\binom{7}{3}$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet die Kugel im Fach 3 (einem anderen Fach)?
  Was bedeutet das?
  Welches Bild ergibt sich, wenn wir 10000 Kugeln rollen lassen?

Auf wie viele Arten können 8 nicht unterscheidbare Türme auf ein Schachbrett gestellt werden, so dass sie sich gegenseitig nicht schlagen können? Farben spielen keine Rolle.

- Wichtig: Fehler in Argumentationen finden
- Was ist falsch an folgender Argumentation?
  Der erste Turm hat 64 Möglichkeiten, der zweite Turm hat $64 - 15 = 49$ Möglichkeiten, der dritte Turm hat $49 - 13 = 36$ Möglichkeiten usw.
  Insgesamt gibt es $64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4$ Möglichkeiten.

$$
\begin{aligned}
64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 &= 8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 \\
&= (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^2 \\
&= 8! \cdot 8!
\end{aligned}
$$

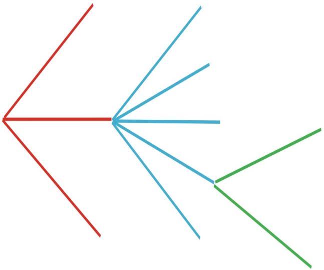
In jede Spalte muss genau ein Turm.
Zählalgorithmus: Wir wählen der Reihe nach für jede Spalte die Zeile, in der der Turm steht: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$
Fehler oben: Türme wurden unterschieden

4 Ausgewählte Probleme

- Zählalgorithmus
- Standardzählprobleme
- Komplexere Anwendungen

Zählalgorithmus = Produktregel der Kombinatorik = allgemeines Zählprinzip

Beispiel: Wie viele Menüs kann man aus 3 Vorspeisen, 5 Hauptgerichten und 2 Nachspeisen zusammenstellen, wenn Geschmacksfragen keine Rolle spielen?
Veranschaulichung im Baumdiagramm:



Lösung: $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$

Beispiel: Bei einem Pferderennen starten 7 Pferde.

Beim „Großen Einlauf“ wettet man auf die drei Erstplatzierten in der richtigen Reihenfolge. Ergebnis: Tripel

Beim „Kleinen Einlauf“ wettet man auf die drei Erstplatzierten ohne Angabe der Reihenfolge. Ergebnis: Teilmenge

Wie viele Möglichkeiten für den Großen Einlauf gibt es? Wie viele sind es für den Kleinen Einlauf?
Lösung:

1. Platz	2. Platz	3. Platz
7 Mögl.	jeweils 6 Mögl.	jeweils 5 Mögl.

Insgesamt $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ Möglichkeiten für den Großen Einlauf

Sei K die unbekannte Anzahl der möglichen Kleinen Einläufe.

Der Kleine Einlauf $\{1, 4, 6\}$ sei fixiert. Wie viele Große Einläufe kann man daraus erzeugen?

Für den 1. Platz gibt es 3 Möglichkeiten, für den 2. jeweils 2 und der 3. steht dann fest. Also gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Möglichkeiten, aus diesem Kleinen Einlauf einen Großen Einlauf zu erzeugen.

Das gilt für jeden Kleinen Einlauf und auf diese Weise erzeugen wir ohne Dopplungen alle Großen Einläufe.

Folglich muss gelten

$$\begin{aligned} K \cdot 3! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \\ K &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \binom{7}{3} = 35 \end{aligned}$$

Zählalgorithmus

Eine Auswahl werde in k aufeinanderfolgenden Schritten vollzogen. Das Ergebnis ist ein k-Tupel. Gibt es dabei

im 1. Schritt		n_1 Möglichkeiten,
im 2. Schritt	**jeweils**	n_2 Möglichkeiten,
...	...	...
im k-ten Schritt	**jeweils**	n_k Möglichkeiten,

so gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ Möglichkeiten der Auswahl.

Gedankliches Zerlegen eines Vorgangs in Teilvorgänge, z.B. 3 Würfel gleichzeitig werfen $\simeq$ 1 Würfel dreimal werfen

Anzahl der Anordnungen einer n-elementigen Menge (Permutationen)

Elemente (Kugeln, Karten, Schüler, Lehrer, ...) mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$ sollen in einer Reihe angeordnet werden. Es gibt

für den 1. Platz		n Möglichkeiten,
für den 2. Platz	**jeweils**	$n-1$ Möglichkeiten,
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
für den n-ten Platz	**jeweils**	1 Möglichkeit.

Es gibt folglich $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten der Anordnung.

$n!$ wächst rasant.

Anzahl der Anordnungen von k Elementen einer n-elementigen Menge (Variationen)

Aus einer Menge von Elementen (Kugeln, Karten, Schüler, Lehrer, ...) mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$ sollen k ausgewählt und in einer Reihe angeordnet werden. Es gibt

für den 1. Platz		n Möglichkeiten,
für den 2. Platz	**jeweils**	$n-1$ Möglichkeiten,
...	...	...
für den k-ten Platz	**jeweils**	$n-(k-1)$ Möglichkeiten.

Es gibt folglich $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$ Möglichkeiten der Anordnung.

Spezialfall $k = n$.

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge (Kombinationen)

Aus einer Menge von Elementen mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$ sollen k ausgewählt werden. (Ohne Beachtung der Reihenfolge!).

Beispiel: $M = \{1, 2, 3\}$ und $k = 2$. Aus jeder Teilmenge entstehen $k! = 2! = 2$ Anordnungen:

$$\{1,\ 2\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 12 \\ \\ 21 \end{array}$$

Auf diese Weise werden auch alle Anordnungen restlos und ohne Überschneidungen erfasst.
„Schäferprinzip“

Folglich gilt:

Anzahl der Anordnungen $=$ Anzahl der Teilmengen $\cdot k!$

bzw.

Anzahl der Teilmengen $=$ Anzahl der Anordnungen $: k!$

Anzahl von Teilmengen

Es gibt

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

k-elementige Teilmengen einer n-elementigen Menge.

$\binom{n}{k}$ **ist für Sek II Einmaleins**

Vermischte Probleme – Zählalgorithmus verbindet Bausteine

- Beispiel Lotto 6 aus 49 ohne Zusatzzahl
  - Getippt seien die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6
  - Modell für Zufall im Ziehungsgerät
  - Ergebnis: 6-elementige Teilmenge einer 49-elementigen Menge
    $\binom{49}{6} = 13983816$ gleichwahrscheinliche Ziehungsergebnisse
  - Anzahl der Möglichkeiten für genau 4 Richtige:
    49 Zahlen zerfallen in „gute“ (1, 2, ..., 6) und
    „schlechte“ (7 bis 49)
    Ziehungsvorgang gedanklich in zwei Schritte zerlegen:

1.	gute Zahlen ziehen	$\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten
2.	schlechte Zahlen ziehen	jeweils $\binom{43}{2} = 903$ Möglichkeiten

    Es gibt $15 \cdot 903 = 13545$ günstige Möglichkeiten für einen Vierer.
  - Wahrscheinlichkeit für einen Vierer: $\frac{13545}{13983816} \approx 0,00097$

- Beispiel: Ein Würfel wird 7-mal geworfen.
  Als Ergebnis notieren wir $(w_1, w_2, \dots, w_7)$.
  - Wie viele Ergebnisse sind möglich?
    Zählalgorithmus $\Rightarrow 6 \cdot 6 \dots \cdot 6 = 6^7$ mögliche Ergebnisse
  - Bei wie vielen Ergebnissen kommt jede Augenzahl von 1 bis 6 vor?
    Umformulierung: Genau eine Augenzahl doppelt
    Zerlegen in Schritte:

1. Schritt	doppelte Augenzahl auswählen	6
2. Schritt	Plätze dieses Pärchens	$\binom{7}{2}$
3. Schritt	restliche 5 Augenzahlen auf 5 Plätze	$5!$

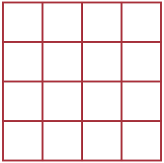
    Bei $6 \cdot \binom{7}{2} \cdot 5! = 15120$ Ergebnissen kommt jede Augenzahl vor.

Übung

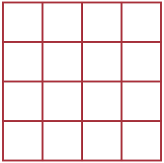
Quelle: A. Engel „Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Band 1, Klett, 1973.

Auf wie viele verschiedene Arten kann man das 4×4-Brett der Zeichnung färben, wenn

a) jedes Feld nach freier Wahl schwarz oder weiß gefärbt wird
b) 8 Felder schwarz und 8 Felder weiß gefärbt werden
c) 2 Felder weiß, 4 Felder schwarz und 10 Felder rot gefärbt werden
d) jedes Feld mit einer anderen von 16 verschiedenen Farben gefärbt wird



Lösung



a) jedes Feld nach freier Wahl schwarz oder weiß: 2^{16}

b) 8 Felder schwarz und 8 Felder weiß: $\binom{16}{8}$

c) 2 Felder weiß, 4 Felder schwarz und 10 Felder rot: $\binom{16}{2} \cdot \binom{14}{4}$

d) jedes Feld mit einer anderen von 16 verschiedenen Farben: $16!$