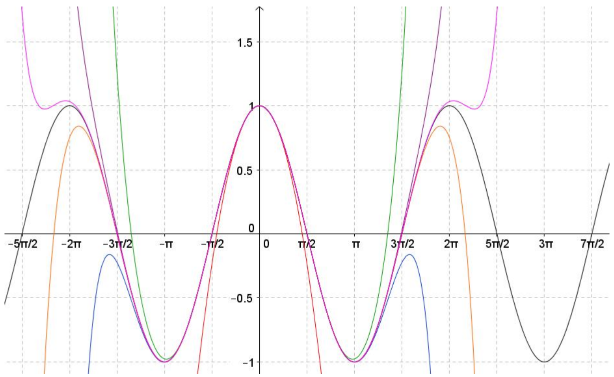
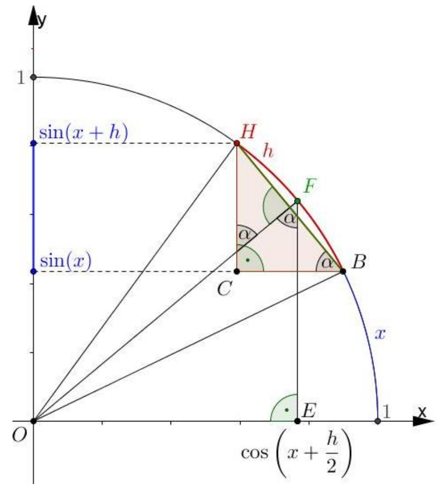
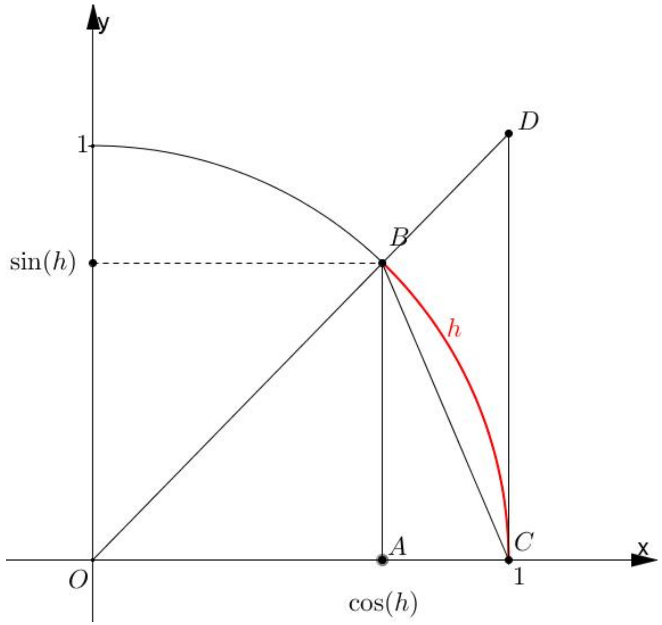


$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

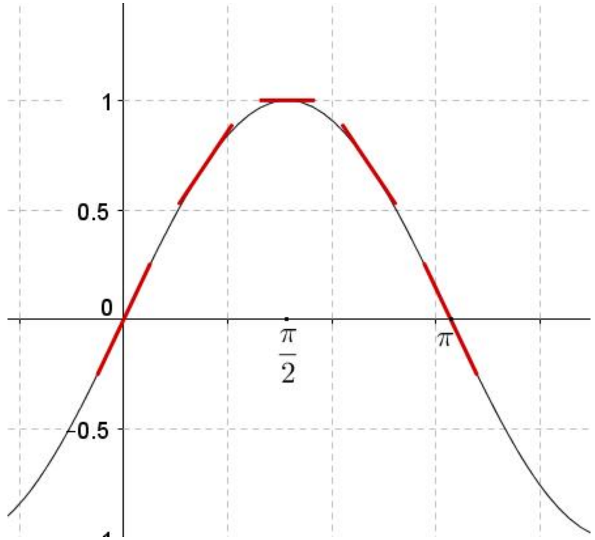


Die Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion (… und ggf. ein paar Anwendungen)



von Stefan Korntreff

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$$



Vorgehen

1. Rahmenlehrplan vs Arnold Kirsch
2. Ableitung

(3. Anwendung: Extremwertaufgaben)

(4. Anwendung: Eine Modellierung)

1. Rahmenlehrplan

- Differential- und Integralrechung mit trigonometrischen Funktionen kommt nur im LK vor:
  - LK
    - *Differentialrechung: Erweiterung und Vernetzung*: Modellieren mit trigonometrischen Funktionen (auch Extremwertprobleme)
    - *Integralrechnung: Anwendung, Vertiefung, Systematisierung*: Stammfunktionen und Integrale von […] trigonometrischen Funktionen
  - GK
    - *weitere mögliche Inhaltsbereiche*: Verknüpfung und Verkettung von trigonometrischen Funktionen

      (f(x)=sin(x))

Vgl. Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin (2006): 30, 32, 39

…dagegen Arnold Kirsch

„Auch in den Minimalkursen zur Analysis *sollten* – neben einfachen rationalen und algebraischen Funktionen – jedenfalls *die Exponential- und die Sinus- (sowie Kosinus-)funktion behandelt werden*. Hierfür sprechen *nicht nur Anwendungsgesichtspunkte*: Eine Beschränkung auf algebraische oder gar rationale Funktionen würde – wegen der bei diesen Funktionen möglichen Ableitungsgewinnung mittels rein algebraischer Manipulation – *auch ein mathematisch unzulängliches Bild von dem fundamentalen Begriff der Ableitung* vermitteln. ***Die Sinusfunktion (wie auch die Kosinusfunktion) ist, als Prototyp einer periodischen Funktion, innermathematisch wie zur Beschreibung periodischer Vorgänge in Natur und Technik unentbehrlich.*** *“* (Kirsch 1979: 51)

Rahmenlehrplan vs Arnold Kirsch

Fragen:

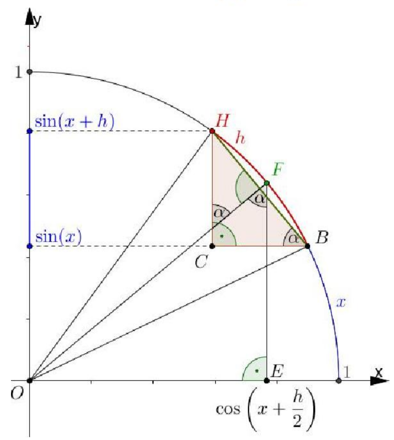
Sind Kirschs Argumente für die Behandlung der Ableitung der trigonometrischen Funktionen heute noch immer gültig?

Falls dem so ist: Ist es dann nicht sträflich, dass wir im Berliner Sek II „Minimalkurs“, also im Grundkurs, die Ableitung der trigonometrischen Funktionen nach RLP gar nicht behandeln?

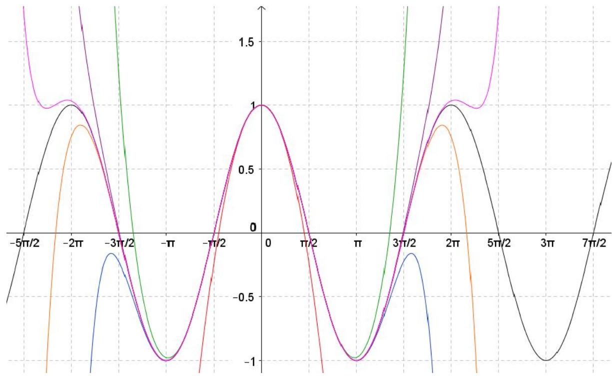
2. Die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2.1 Überblick: Der übliche Zugang in der reellen Analysis



2.2 Der klassische konventionelle Zugang



2.3 Ein revolutionärer Zugänge

2.1 Der übliche Zugang in der reellen Analysis

Sinus- und Kosinusfunktion werden als *Summenfunktionen* definiert, d. h. als *Summen von Potenzreihen*

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbf{R}$, reellen Koeffizienten a_n mit $n \in \mathbf{N}$ und Konvergenzintervall $K := \{x \in \mathbf{R} : |x - x_0| < r\}$, wobei der Konvergenzradius r wie folgt definiert ist: $r := 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, $r = \frac{1}{0} := +\infty$, $r = \frac{1}{+\infty} := 0$. Dann wird die *Summenfunktion* $f : K \to \mathbf{R}$ durch folgende Funktionsvorschrift definiert:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

Vgl. Heuser (2009): 362 f., 367

2.1 Der übliche Zugang in der reellen Analysis

Sei $n \in \mathbf{N}$ und seien $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbf{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit

$$s_k := \begin{cases} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k!}, & \text{falls } k = 2n+1 \\ 0 & \text{falls } k = 2n. \end{cases} \qquad c_k := \begin{cases} \frac{(-1)^{k/2}}{k!}, & \text{falls } k = 2n \\ 0 & \text{falls } k = 2n+1 \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Folgen definiert man nun die Summenfunktionen $\sin : \mathbf{R} \to [-1,1]$ und $\cos : \mathbf{R} \to [-1,1]$ durch

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Vgl. Heuser (2009): 391

2.1 Der übliche Zugang in der reellen Analysis

Differenzierbarkeitssatz

Die Summenfunktion f der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ist auf dem ganzen Konvergenzintervall K beliebig oft differenzierbar, und ihre Ableitungen können durch gliederweise Differentiation gewonnen werden. Sei mit $f^{(k)}$ die *k*-te Ableitung von f bezeichnet, dann gilt für jedes $x \in K$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\cdot\cdots\cdot(n+1)a_{n+k}(x-x_0)^n$$

Vgl. Heuser (2009): 368 f.

… und damit folgt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} =$$

… und damit folgt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)x^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$=_{(m:=n-1)} \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$= (-1)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = -\sin(x).$$

2.2 Zugänge zur Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion

Konservative Zugänge:

knüpfen an die bestehenden Grundvorstellungen der SuS und ihre Kenntnisse aus der Sek I an.

2.2 Zugänge zur Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion

Konservative Zugänge:

knüpfen an die bestehenden Grundvorstellungen der SuS und ihre Kenntnisse aus der Sek I an.

Revolutionäre Zugänge:

geben eine neue Definition der Sinus- und Kosinusfunktion vor und erarbeiten aus dieser die Ableitung der Funktionen. Im Zuge dessen oder anschließend wird eine Rückbindung zu den bestehenden Grundvorstellungen und Kenntnissen der SuS aus der Sek I vorgenommen.

Konservative Zugänge – drei Stufen der Strenge nach Kirsch (1979)

(*S1) eine Vermutungen aus der Anschauung*

(S2) eine voll überzeugende Begründung aus der Geometrie

(S3) verschiedene Beweise

Konservative Zugänge – drei Stufen der Strenge nach Kirsch (1979)

(S1) eine Vermutungen aus der Anschauung

~~*(S2) eine voll überzeugende Begründung aus der Geometrie*~~

(S3) verschiedene Beweise

Konservative Zugänge – drei Stufen der Strenge nach Kirsch (1979)

(S1) eine Vermutungen aus der Anschauung

~~*(S2) eine voll überzeugende Begründung aus der Geometrie*~~

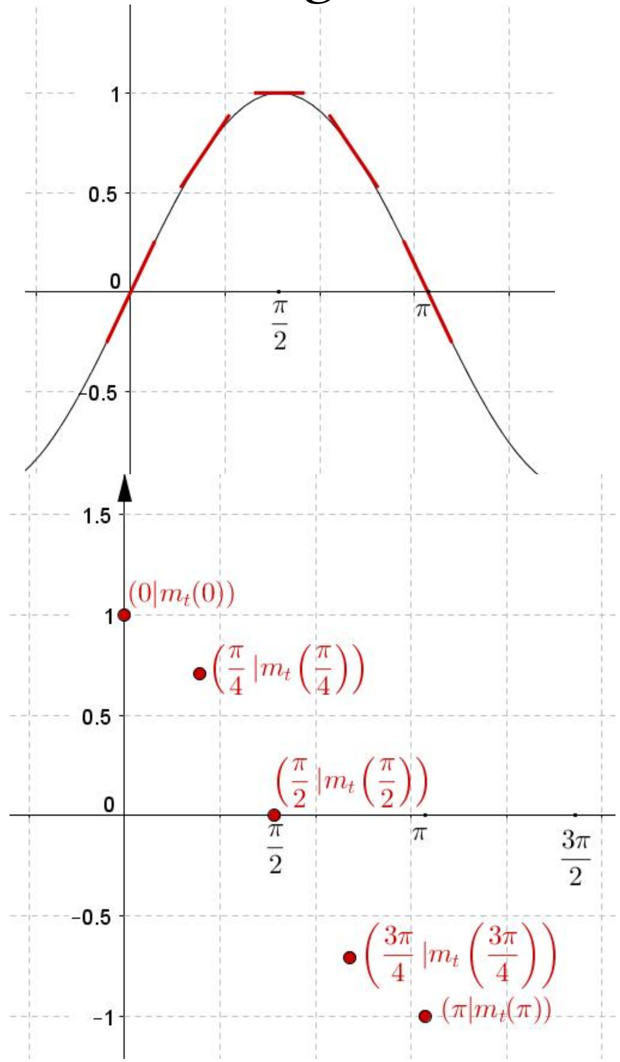
(S3) verschiedene Beweise

(S1) Eine Vermutung aus der Anschauung

Vermutung über die Ableitung der Sinusfunktion wird durch *graphisches Differenzieren* gewonnen.

Dieses Verfahren ist sicherlich dann gewinnbringend, wenn zum mathematischen Argumentieren und Begründen aufgefordert wird:

Welche Eigenschaften der Ableitungsfunktion sin‘ können aus dem Graphen der Sinusfunktion abgelesen werden?



Vgl. Bigalke/Köhler (1998) , Jost (2010), Kirsch (1979), Zappe (1989)

Eigenschaften der Ableitung der Sinusfunktion

- sin besitzt an den Stellen $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbf{Z}$ Extrema, weshalb der Graph der Ableitungfunktion dort die x-Achse schneidet.

- sin besitzt an den Stellen $x = k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$ Wendepunkte, weshalb die Ableitungsfunktion $\sin'$ dort Extremstellen hat.

- sin ist auf den Intervallen $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ mit $k \in \mathbf{Z}$, k gerade, streng monoton wachsend, weshalb $\sin'$ dort positiv ist.

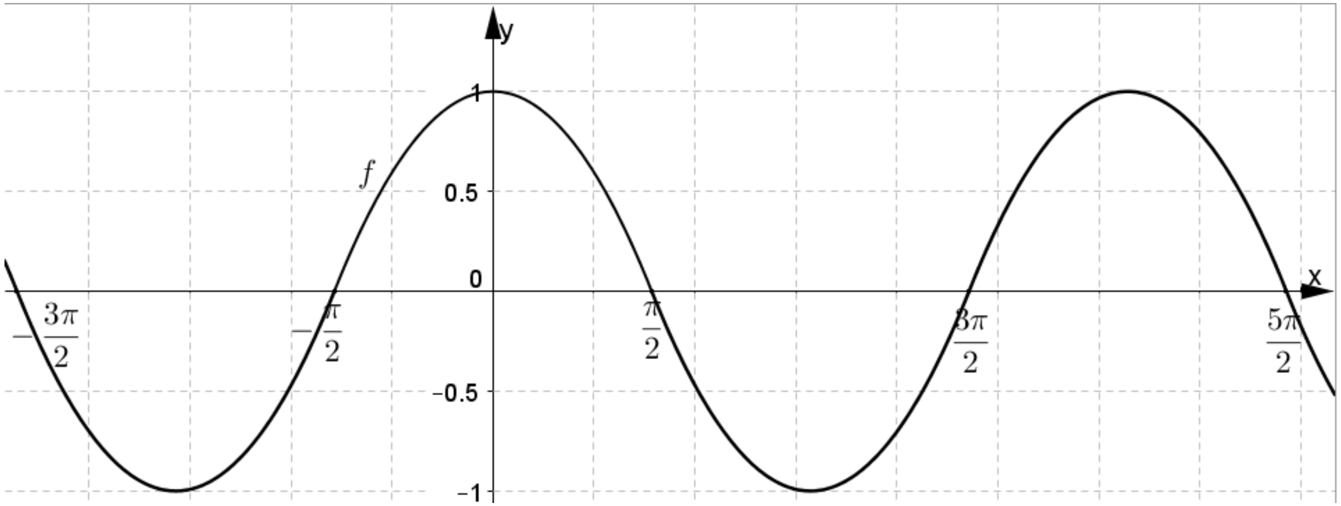
- sin ist auf den Intervallen $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ mit $k \in \mathbf{Z}$, k ungerade, streng monoton fallend, weshalb $\sin'$ dort negativ ist.

- Die Ableitung der Sinusfunktion $\sin'$ muss 2π-periodisch sein, da sin 2π-periodisch ist.

- Da sin punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist, muss $\sin'$ achsensymmetrisch zu $x = 0$ sein.

Eigenschaften der Ableitung der Sinusfunktion

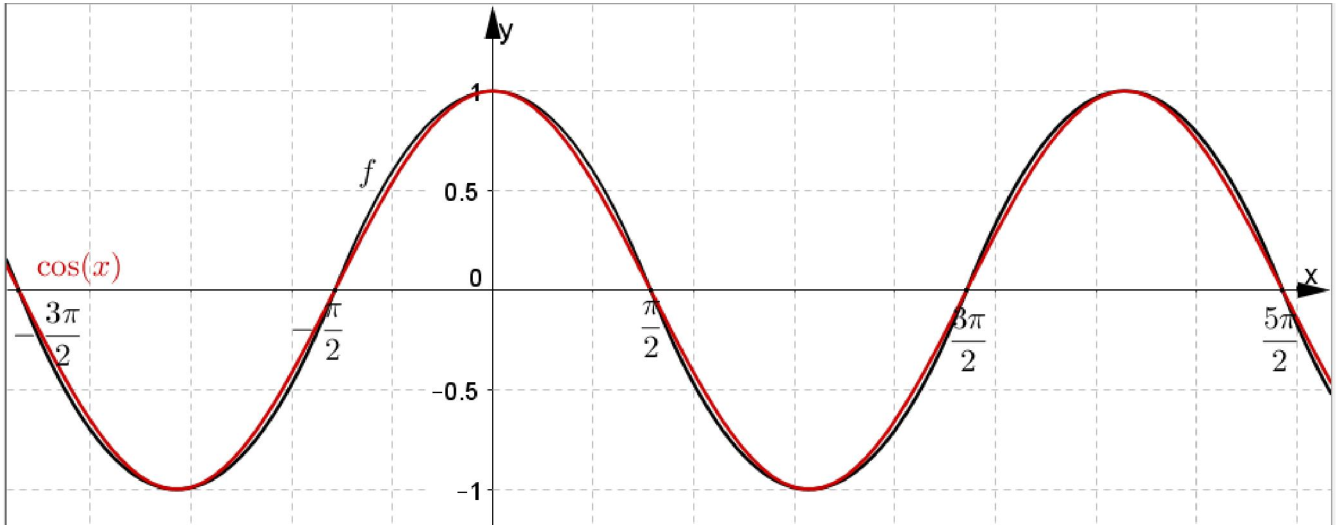
Unsere erarbeiteten Eigenschaften legen einen Funktionsgraphen der folgenden Art nahe:



Eigenschaften der Ableitung der Sinusfunktion

Unsere erarbeiteten Eigenschaften legen einen Funktionsgraphen der folgenden Art nahe:

Hierbei handelt es sich allerdings um:



$$f : \mathbf{R} \to [-1,1] \text{ mit } f(x) = (-1)^k \left(1 - 4\frac{(x-k\pi)^2}{\pi^2}\right), \text{ falls } x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$$

Konservative Zugänge – drei Stufen der Strenge nach Kirsch (1979)

(*S1) eine Vermutungen aus der Anschauung*

~~*(S2) eine voll überzeugende Begründung aus der Geometrie*~~

(S3) verschiedene Beweise

(S3) Beweise von sin'(x) = cos(x)

Die „AGG-Beweise":

benutzen

*ein **A**dditionstheorem,*

*die **G**renzwertsätze und*

*den „Sinus-**G**renzwert"*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

(S3) Beweise von sin'(x) = cos(x)

Die „AGG-Beweise":

benutzen

*ein **A**dditionstheorem,*

*die **G**renzwertsätze und*

*den „Sinus-**G**renzwert"*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

andere:

*benutzen mindestens eine der Voraussetzungen (links) **nicht** und meistens nutzen sie sogar keine dieser Voraussetzungen*

(S3) Beweise von sin‘(x) = cos(x)

Die „AGG-Beweise“:

benutzen

*ein **A**dditionstheorem,*

*die **G**renzwertsätze und*

*den „Sinus-**G**renzwert“*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

andere:

*benutzen mindestens eine der Voraussetzungen (links) **nicht** und meistens nutzen sie sogar keine dieser Voraussetzungen*

Der Klassiker! *– „traditionell“, „gebräuchlich“, „üblich“*

Jost (2010): 333, Kirsch (1979): 65, Schreiber (1976): 65

Die drei „AGG-Schritte“ des Klassikers

0. Schritt: Start mit dem *Differenzenquotienten*:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Vgl. u. a. Bigalke/Köhler (1998), Deutsches Institut für Fernstudien … (1981), Jost (2010), Kirsch (1979), Kroll (1976), Kroll (1982), Scharf (2010a), Schreiber (1976), Vietoris (1957) und Zappe (1989).

Die drei „AGG-Schritte“ des Klassikers

<u>*1. Schritt*</u>: Einsatz „Sinus-*Additionstheorem*“:

$$\boxed{\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \quad \textbf{mit } x, y \in \mathbf{R}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \right)$$

<u>*2. Schritt*</u>: Einsatz *Grenzwertsätze*:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right)\\ &= \sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

3. Schritt: Bestimmung der *Grenzwerte*:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} \qquad\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right) \\
&= \sin(x)\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}}+\cos(x)\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}
\end{aligned}$$

Die drei „AGG-Schritte" des Klassikers

<u>3. Schritt</u>: Bestimmung der *Grenzwerte*:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}} \qquad\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right)\\ &= \sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}\end{aligned}$$

Die große Herausforderung: der „Sinus-Grenzwert"

Zeige:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

In den 1980er Jahren wurde im Rahmenlehrplan gefordert, dass dieser Grenzwert einfach nur mitgeteilt wird.
(vgl. Pietrowiak/Schulz (1986): 744; Zappe (1989): 797)

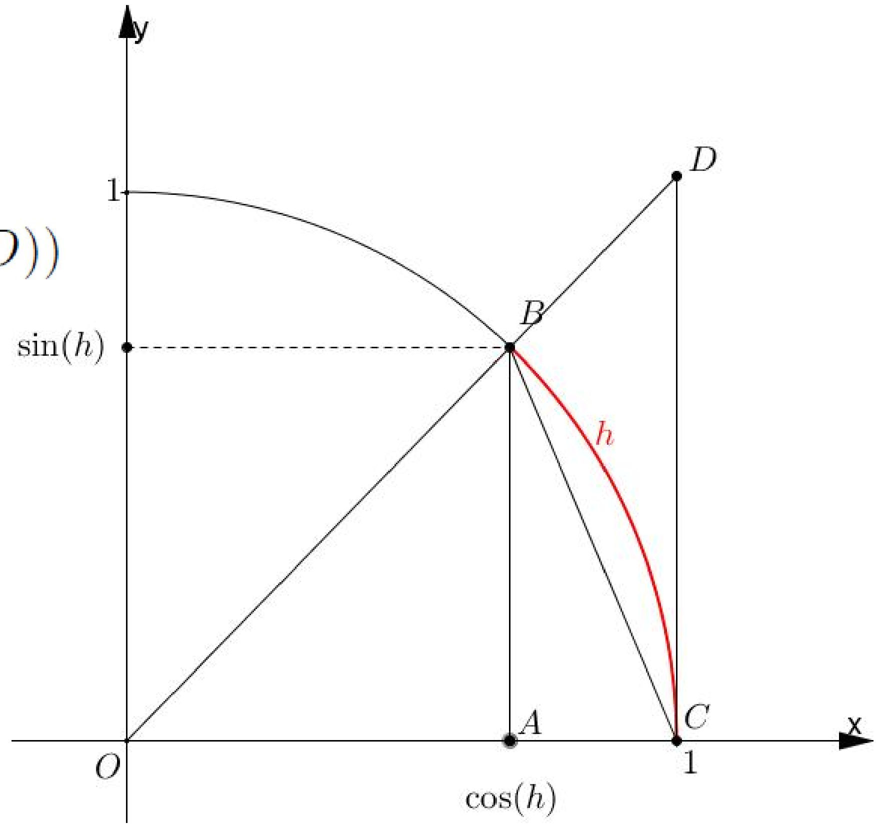
Wir sehen uns „klassischen" Schulbeweis an.

Vgl. Deutsches Institut für Fernstudien … (1981), Hering (1983), Kirsch (1979), Reuter (1960), Richman (1993)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Eine Ungleichung:

$$A(\Delta(OCB)) \leq A(K_S(OCB)) \leq A(\Delta(OCD))$$

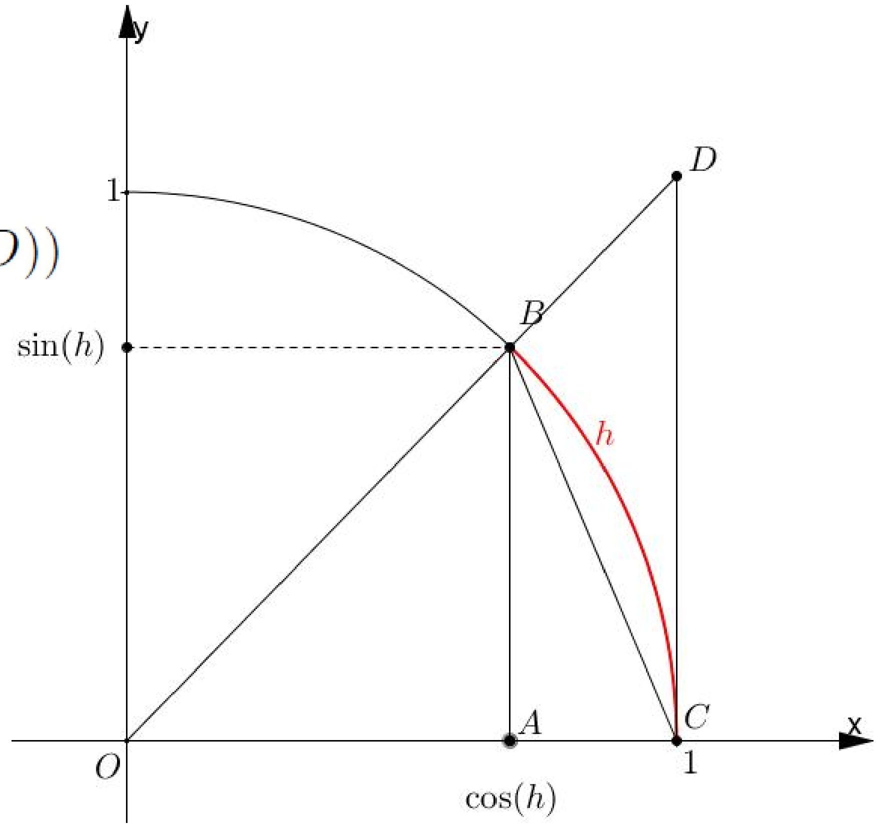


$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

<u>*Eine Ungleichung*</u>:

$$\boxed{A(\Delta(OCB))} \leq A(K_S(OCB)) \leq A(\Delta(OCD))$$

$$\frac{1}{2}\sin(h) \;\cdot\; 1$$



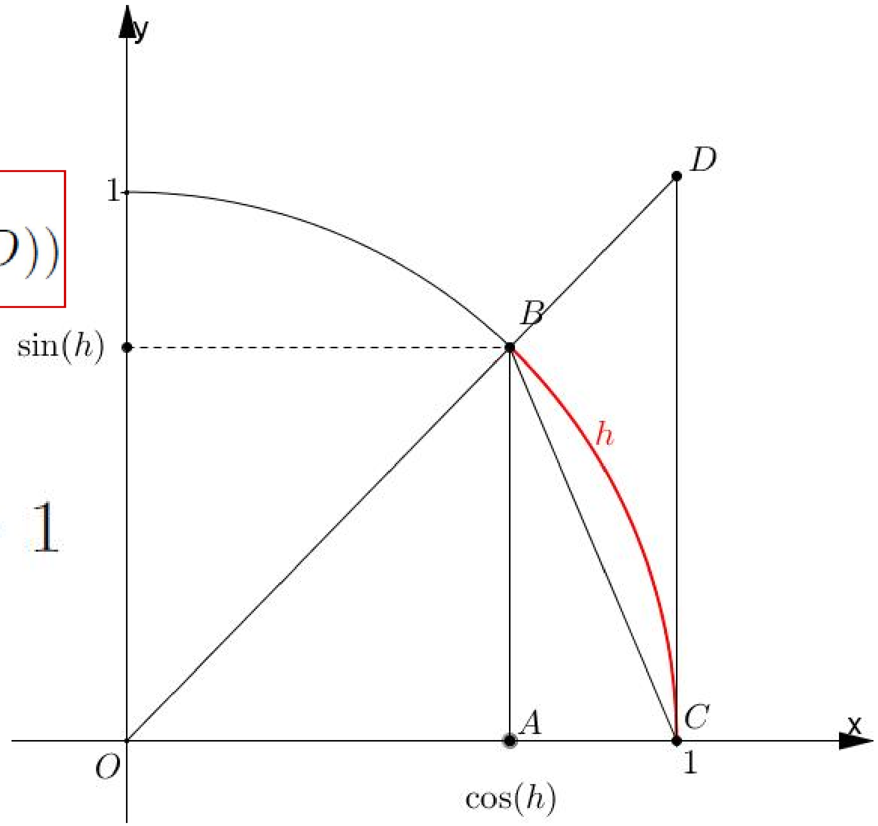
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Eine Ungleichung:

$$A(\Delta(OCB)) \leq A(K_S(OCB)) \leq \boxed{A(\Delta(OCD))}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{2}\sin(h) \qquad\qquad \frac{1}{2}\tan(h) \cdot 1$$



$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

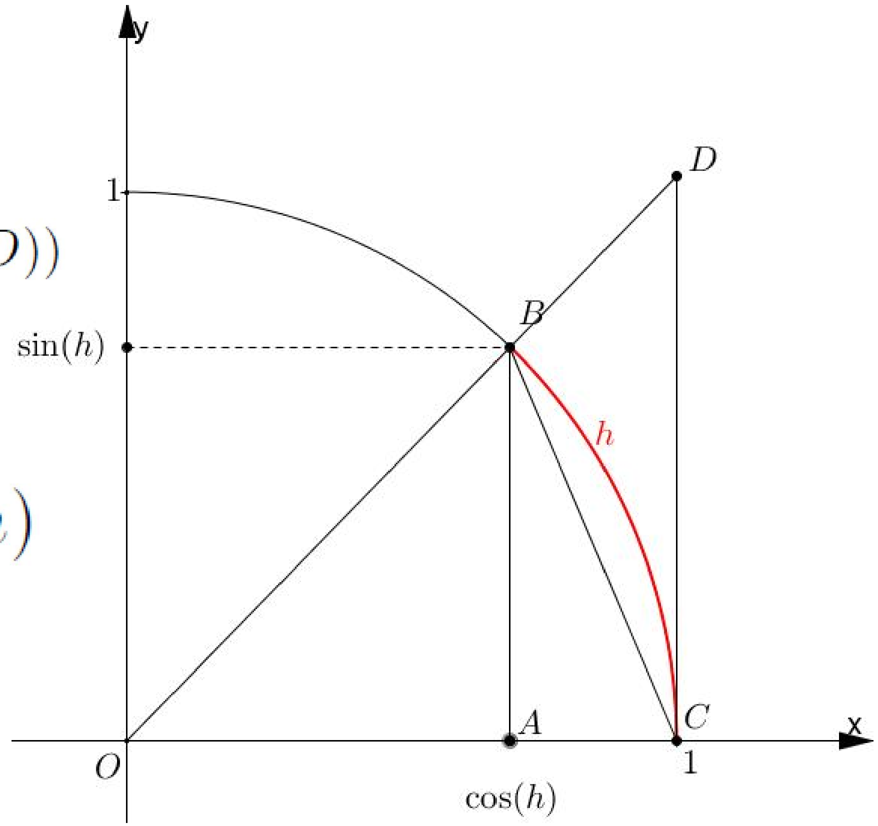
<u>*Eine Ungleichung*</u>:

$$A(\Delta(OCB)) \leq \boxed{A(K_S(OCB))} \leq A(\Delta(OCD))$$

$$\tfrac{1}{2}\sin(h) \qquad\qquad \tfrac{1}{2}\tan(h)$$

$$\frac{h}{2\pi} = \frac{A(K_S(OCB))}{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad A(K_S(OCB)) = \frac{h}{2}$$

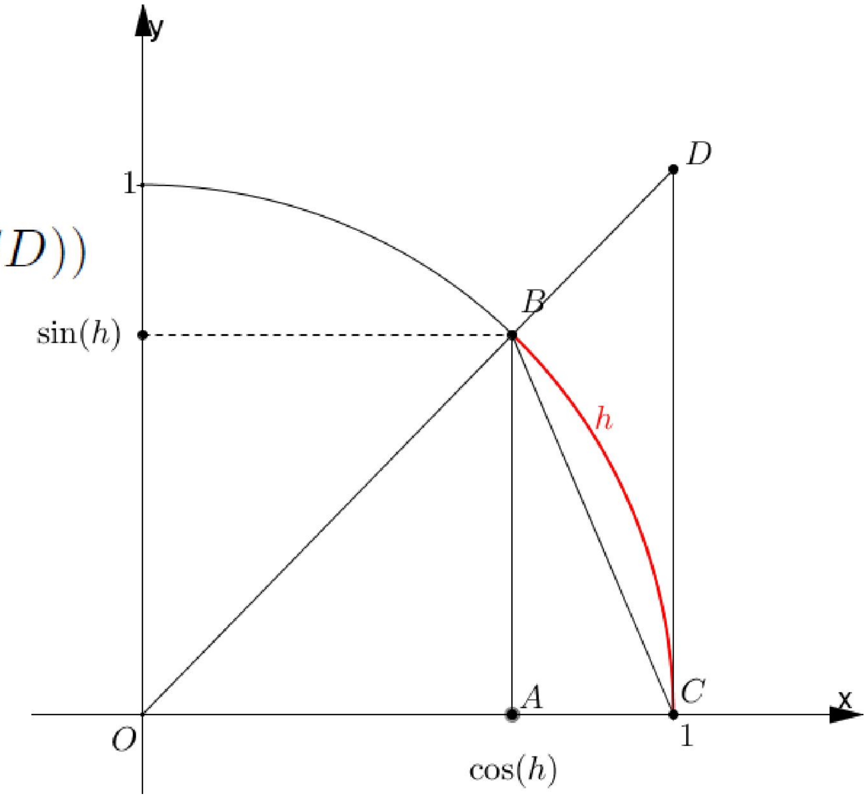


$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Eine Ungleichung:

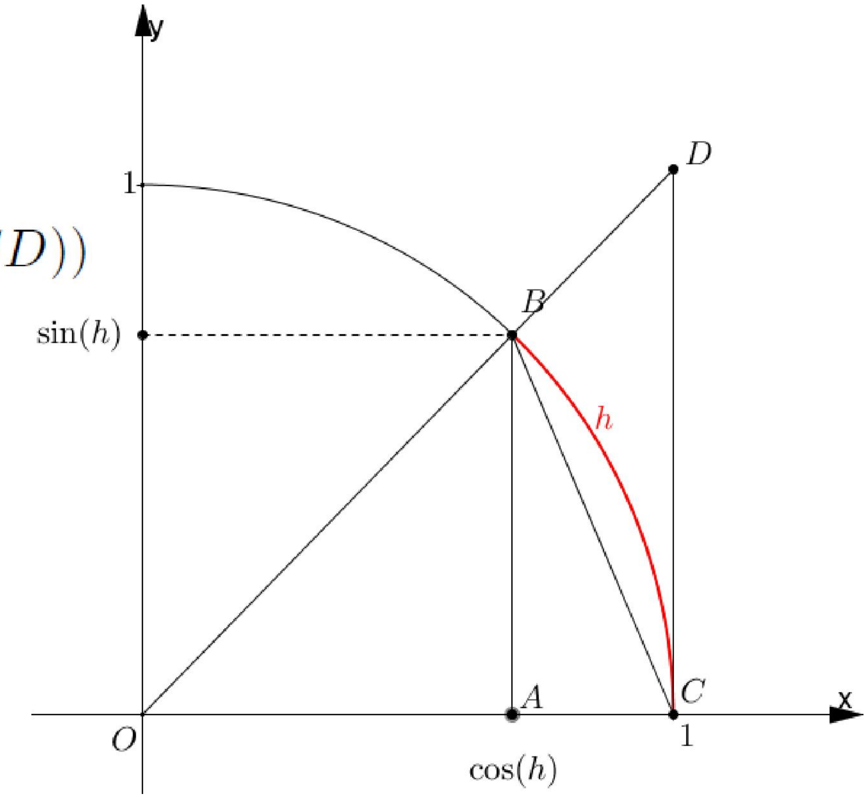
$$A(\Delta(OCB)) \leq A(K_S(OCB)) \leq A(\Delta(OCD))$$

$$\Rightarrow \quad \sin(h) \leq h \leq \tan(h)$$



$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

<u>*Eine Ungleichung*</u>:



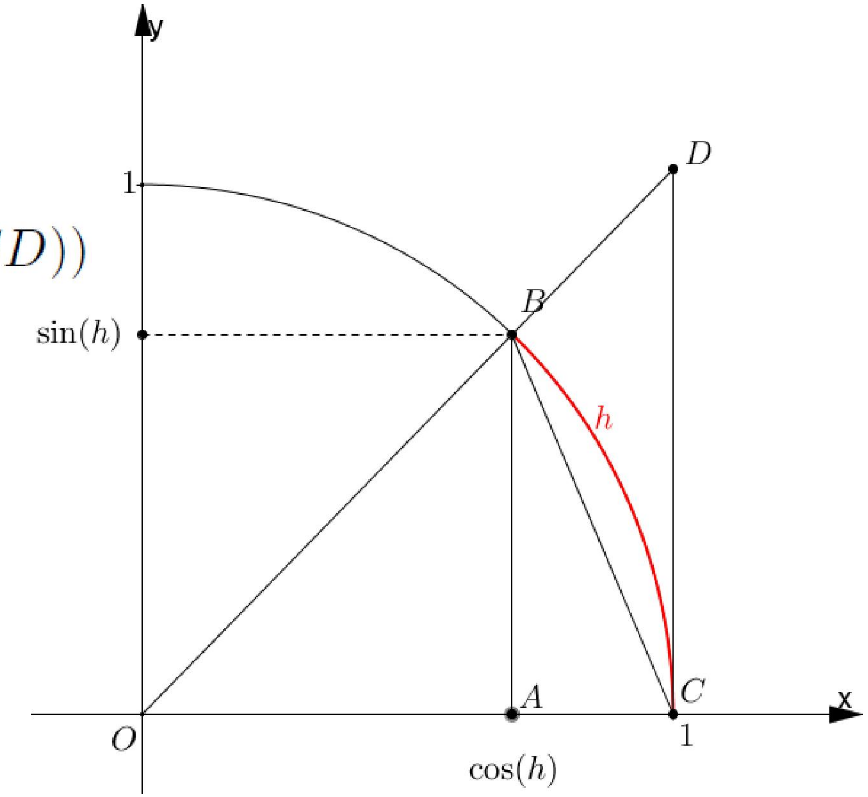
$$A(\Delta(OCB)) \leq A(K_S(OCB)) \leq A(\Delta(OCD))$$

$$\Rightarrow \quad \sin(h) \leq h \leq \tan(h)$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \frac{h}{\sin(h)} \leq \frac{\tan(h)}{\sin(h)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

<u>*Eine Ungleichung*</u>:



$$A(\Delta(OCB)) \le A(K_S(OCB)) \le A(\Delta(OCD))$$

$$\Rightarrow \quad \sin(h) \le h \le \tan(h)$$

$$\Rightarrow \quad 1 \le \frac{h}{\sin(h)} \le \frac{\tan(h)}{\sin(h)}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(h) \le \frac{\sin(h)}{h} \le 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

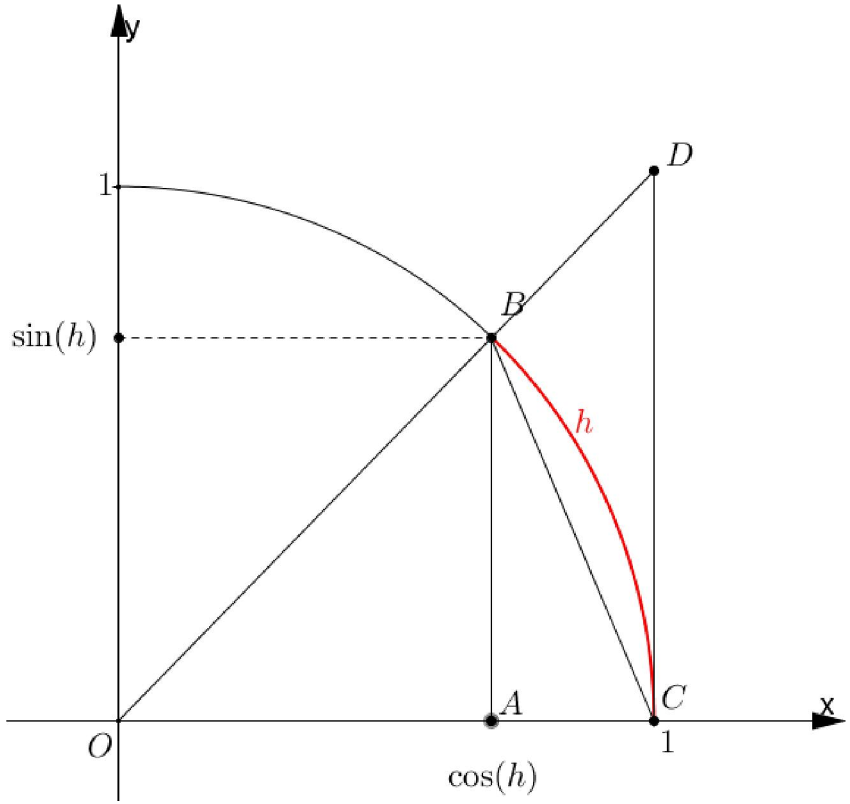
$$\cos(h) \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq 1$$

<u>*und ohne die Stetigkeit des Kosinus*</u>:

$$1 - \cos(h) = |AC| \leq |BC| \leq h$$

$$\Rightarrow \qquad 1 - h \leq \cos(h)$$

$$\Rightarrow \qquad 1 - h \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq 1$$



Wo stehen wir gerade?

0. Schritt: Start mit dem *Differenzenquotienten*

1. Schritt: Einsatz „Sinus-*Additionstheorem*“

2. Schritt: Einsatz *Grenzwertsätze*

3. Schritt: Bestimmung der *Grenzwerte*:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \qquad \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$$

Wo stehen wir gerade?

0. Schritt: Start mit dem *Differenzenquotienten*

1. Schritt: Einsatz „Sinus-*Additionstheorem*"

2. Schritt: Einsatz *Grenzwertsätze*

3. Schritt: Bestimmung der *Grenzwerte*:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \qquad \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}}$$

Wege zum Kosinusgrenzwert

Voraussetzung: $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auch beweisen

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$$

Wege zum Kosinusgrenzwert

Voraussetzung: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auf den „Sinus-Grenzwert“ zurückführen.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$$

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auch beweisen

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$$

Wege zum Kosinusgrenzwert

Voraussetzung: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auf den „Sinus-Grenzwert“ zurückführen.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$$

Oder:
Wir können eine ganz andere Formel nutzen:

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auch beweisen

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{mit } x, y \in \mathbf{R}$$

Eine ganz andere Formel…

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{mit } x, y \in \mathbf{R}$$

<u>*Vorteile*</u>: beide Darstellungen des Differenzenquotienten möglich & nur ein schwieriger Grenzwert muss gezeigt werden

$$\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}},$$

$$\frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \frac{2\cos\left(\frac{x_0+h+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x_0+h-x_0}{2}\right)}{h} = \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

<u>*Nachteil*</u>: entweder komplizierte Herleitung oder gar keine

Vgl. Schmid/Schweizer (2001), Kirsch (1979), Stark (1984) und für Kritik Jost (2010).

Eine ganz andere Formel…

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{mit } x, y \in \mathbf{R}$$

die etwas unattraktive Herleitung:

$$\begin{aligned}
&2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
&= 2\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right] \\
&= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left[\sin^2\left(\frac{y}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{y}{2}\right)\right] - 2\sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \left[\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] \\
&= \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y}{2} + \frac{y}{2}\right) = \sin(x) - \sin(y).
\end{aligned}$$

Wege zum Kosinusgrenzwert

Voraussetzung: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auf den „Sinus-Grenzwert“ zurückführen.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$$

Oder:
Wir können eine ganz andere Formel nutzen:

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auch beweisen

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{mit } x, y \in \mathbf{R}$$

Wege zum Kosinusgrenzwert

Voraussetzung: $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auf den „Sinus-Grenzwert“ zurückführen.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$$

Oder:
Wir können eine ganz andere Formel nutzen:

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auch beweisen

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}$$

… *oder doch die Reduktion auf den „Sinus-Grenzwert“?*

<u>*Zeige*</u>:

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} = -\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

<u>*Voraussetzungen*</u>:

(V1) *Kosinus-Additionstheorem*

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{mit } x, y \in \mathbf{R}.$$

(V2) *trigonometrischer Pythagoras*

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \text{mit} \quad x \in \mathbf{R}$$

Vgl. Rose (1991): 140

… oder doch die Reduktion auf den „Sinus-Grenzwert"?

<u>*Beweis*</u>:

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = -\frac{1-\cos\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{1-\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

… oder doch die Reduktion auf den „Sinus-Grenzwert“?

Beweis:

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = -\frac{1-\cos\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)}{h} \overset{\text{(V1)}}{=} -\frac{1-\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

(V1) *Kosinus-Additionstheorem*

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{mit } x, y \in \mathbf{R}.$$

… oder doch die Reduktion auf den „Sinus-Grenzwert“?

<u>*Beweis*</u>:

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = -\frac{1-\cos\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{1-\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{(V2)}}}{=} -\frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

(V2) *trigonometrischer Pythagoras*

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \quad \text{mit} \quad x\in\mathbf{R}$$

Wege zum Kosinusgrenzwert

Voraussetzung: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auf den „Sinus-Grenzwert“ zurückführen.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$$

Oder:
Wir können eine ganz andere Formel nutzen:

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{mit } x, y \in \mathrm{R}$$

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auch beweisen

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$$

Wege zum Kosinusgrenzwert

Voraussetzung: $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auf den „Sinus-Grenzwert“ zurückführen.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}$$

Oder:
Wir können eine ganz andere Formel nutzen:

Wir können den „Kosinus-Grenzwert“ auch beweisen

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}$$

Ein Beweis des „Kosinus-Grenzwerts“

Zeige: $$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$$

über $$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} = 0$$

Vgl. Deutsches Institut für Fernstudien … (1981): 79 f.

Ein Beweis des „Kosinus-Grenzwerts“

Zeige: $$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} = 0$$

für kleines $h > 0$:

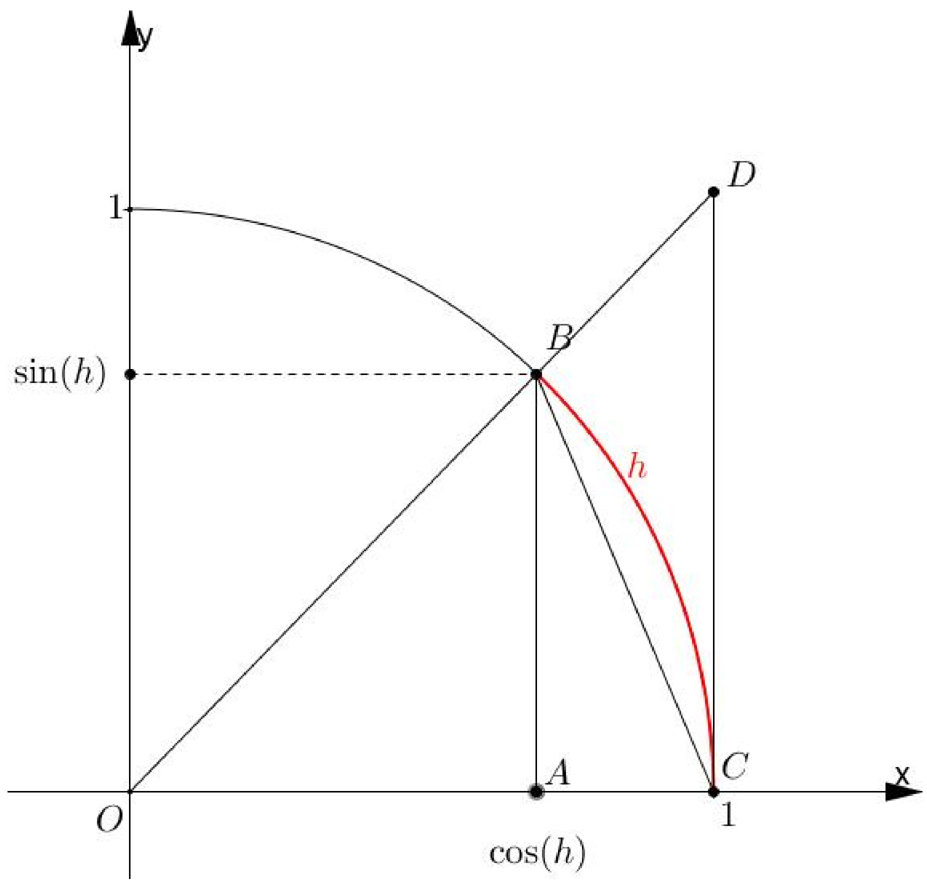
$$0 \leq \frac{1-\cos(h)}{h}$$

Ein Beweis des „Kosinus-Grenzwerts“

<u>*Zeige*</u>: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} = 0$

mit $|BC| \leq h$ folgt:

$$0 \leq \frac{1-\cos(h)}{h} \leq \frac{1-\cos(h)}{|BC|}$$

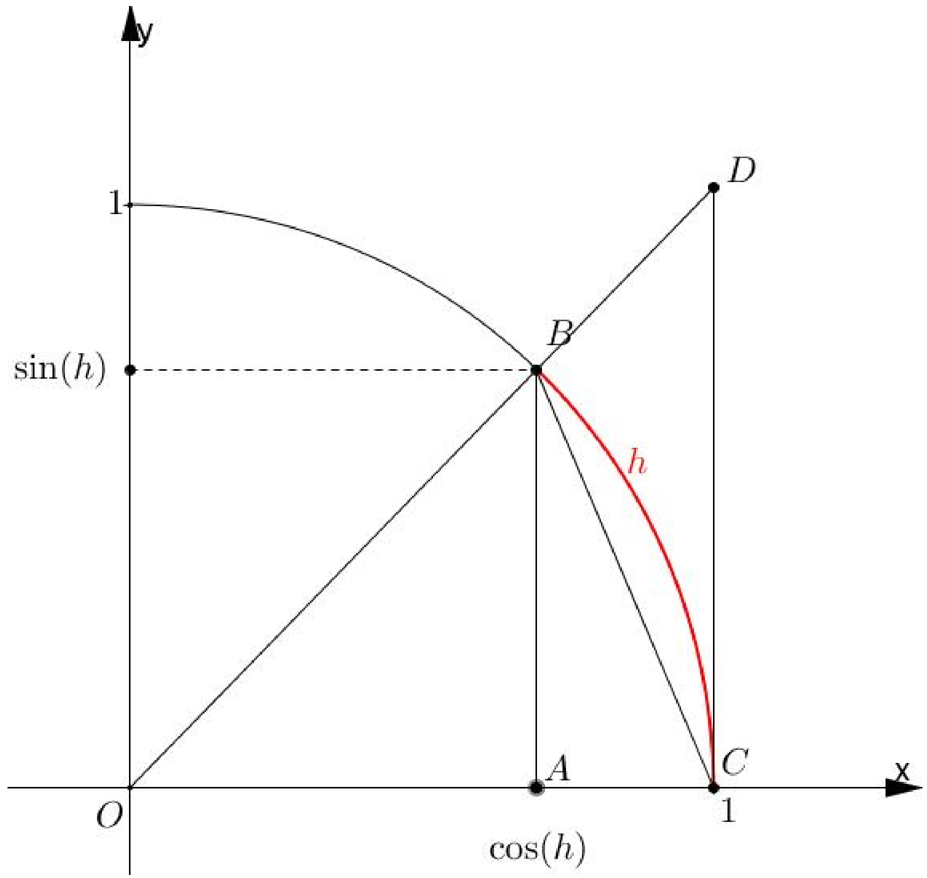


Ein Beweis des „Kosinus-Grenzwerts“

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
|BC|^2 &= |AC|^2 + |AB|^2 \\
&= (1-\cos(h))^2 + \sin^2(h) \\
&= 2 - 2\cos(h) \\
&= 2(1-\cos(h))
\end{aligned}
$$

$$0 \leq \frac{1-\cos(h)}{h} \leq \frac{1-\cos(h)}{|BC|}$$



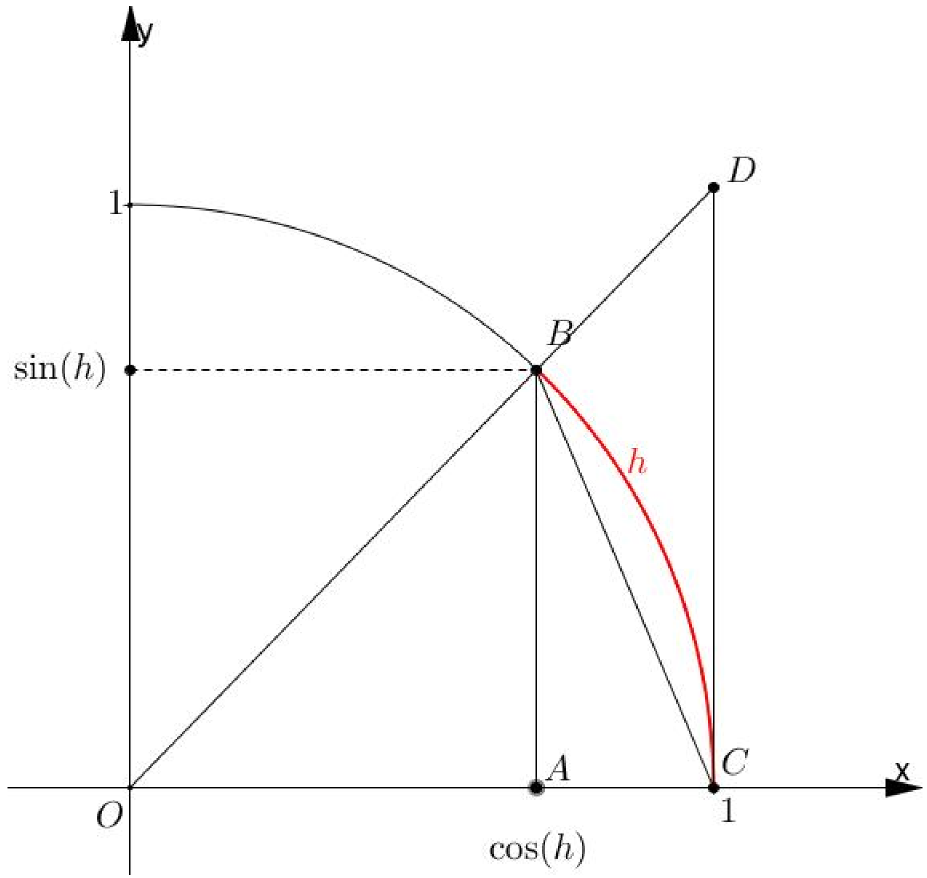
Ein Beweis des „Kosinus-Grenzwerts"

Es gilt:

$$\begin{aligned}|BC|^2 &= |AC|^2 + |AB|^2 \\ &= (1-\cos(h))^2 + \sin^2(h) \\ &= 2 - 2\cos(h) \\ &= 2(1-\cos(h))\end{aligned}$$

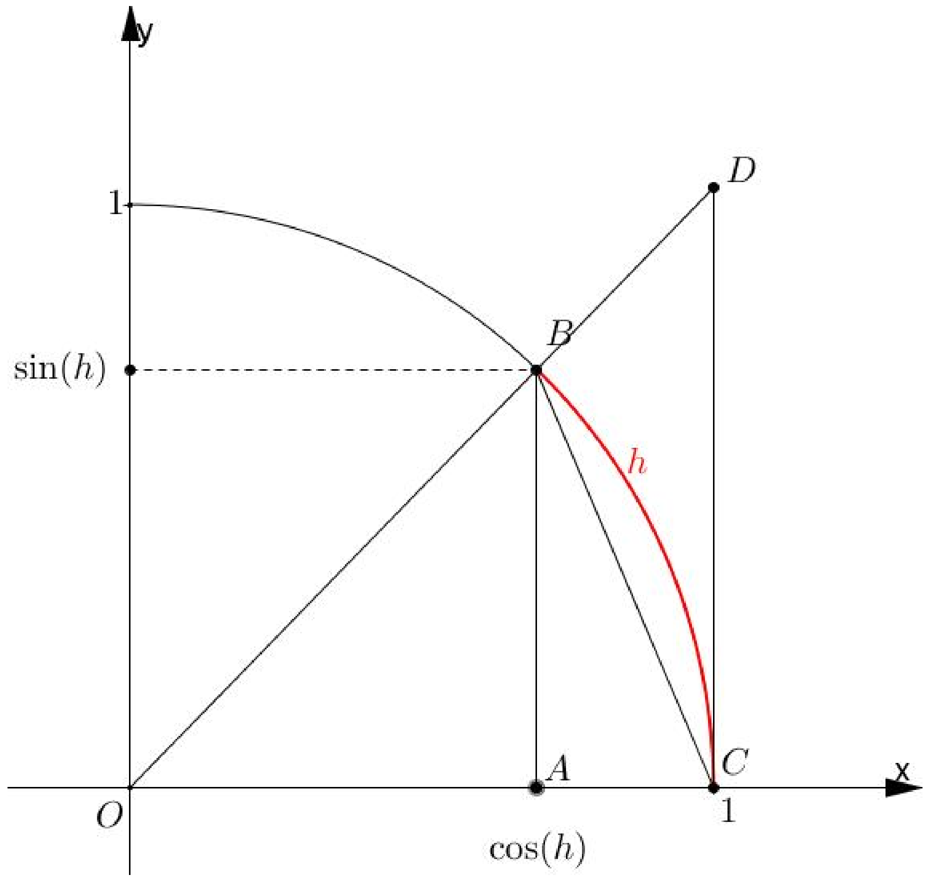
$$0 \leq \frac{1-\cos(h)}{h} \leq \frac{1-\cos(h)}{|BC|}$$

$$= \frac{|BC|^2/2}{|BC|} = \frac{|BC|}{2}$$



Ein Beweis des „Kosinus-Grenzwerts“

Zeige: $$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)}{h}=0$$



mit $|BC| \le h$ folgt:

$$0 \le \frac{1-\cos(h)}{h} \le \frac{1-\cos(h)}{|BC|}$$

$$= \frac{|BC|^2/2}{|BC|} = \frac{|BC|}{2} \le \frac{h}{2}$$

Landkarte der Zugänge zur Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion

konservative Zugänge

revolutionäre Zugänge

AGG-Beweise

nicht-*AGG*-Beweise

Der Klassiker

…

3 alternative Wege mit dem „Kosinus-Grenzwert“ umzugehen

Josts Kritik am „traditionelle Verfahren“ (ders. (2010): 334)

„Letztlich sind *beide traditionellen Verfahren* zur Herleitung der Ableitungsfunktionen der Kosinus- und Sinusfunktion unbefriedigend. *Das grafische Verfahren* wegen mangelnder Exaktheit, *das rechnerische Verfahren*, weil hier aus Schülersicht lediglich aus mehr oder weniger bekannten „Formeln“ eine neue bis dahin unbekannte Beziehung abgeleitet wird.

Josts Kritik am „traditionelle Verfahren“ (ders. (2010): 334)

„Letztlich sind *beide traditionellen Verfahren* zur Herleitung der Ableitungsfunktionen der Kosinus- und Sinusfunktion unbefriedigend. *Das grafische Verfahren* wegen mangelnder Exaktheit, *das rechnerische Verfahren*, weil hier aus Schülersicht lediglich aus mehr der weniger bekannten „Formeln“ eine neue bis dahin unbekannte Beziehung abgeleitet wird.

Wenn dafür sogar explizit auf eine Formelsammlung verwiesen werden muss, erhebt sich die Frage, was durch die Herleitung überhaupt erreicht wird. Mit gleichem Recht könnte man gleich dazu auffordern, das Ergebnis in der Formelsammlung nachzuschlagen und auf eine Herleitung ganz zu verzichten.“

Landkarte der Zugänge zur Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion

- konservative Zugänge
  - *AGG*-Beweise
    - *Der Klassiker*
      - 3 alternative Wege mit dem „Kosinus-Grenzwert“ umzugehen
    - …
  - nicht-*AGG*-Beweise
- revolutionäre Zugänge
  - Differentialgleichung
  - Potenzreihendarstellung
  - …

Landkarte der Zugänge zur Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion

konservative Zugänge

revolutionäre Zugänge

AGG-Beweise

nicht-*AGG*-Beweise

Differentialgleichung

Potenzreihendarstellung

$$f''(x) = -f(x)$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1$$

Der Klassiker

...

3 alternative Wege mit dem „Kosinus-Grenzwert“ umzugehen

Landkarte der Zugänge zur Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion

konservative Zugänge

revolutionäre Zugänge

AGG-Beweise

nicht-*AGG*-Beweise

Differentialgleichung
Potenzreihendarstellung
…

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Der Klassiker

…

3 alternative Wege mit dem „Kosinus-Grenzwert“ umzugehen

Landkarte der Zugänge zur Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion

konservative Zugänge

revolutionäre Zugänge

AGG-Beweise

nicht-*AGG*-Beweise

Differentialgleichung

Potenzreihendarstellung

…

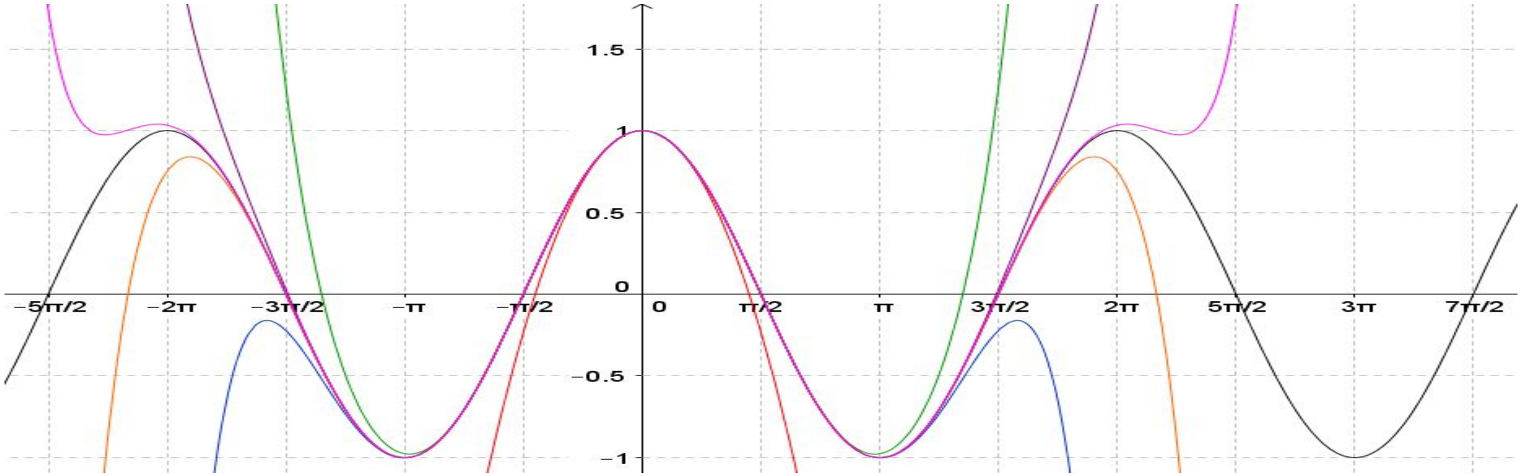
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Der Klassiker

…

3 alternative Wege mit dem „Kosinus-Grenzwert“ umzugehen

Jost (2010): Zugang über die Potenzreihen



<u>*Arbeitsaufträge*</u>:

1. Lest das Arbeitsblatt von Jost und erarbeitet Vor- und Nachteile seines Zugangs im Vergleich zu den anderen Zugängen: dem *graphischen Differenzieren* und dem *klassischen AGG-Beweis*.
2. Stimmt ihr den von Jost genannten Vor- und „Nachteilen" seines Zuganges zu?

Jost (2010): Zugang über die Potenzreihen

Josts über die Vorteile seines Verfahrens (ebd.: 335):

- *entdeckendes Lernen mit Schüleraktivität statt lehrerzentrierter Unterricht.*
- *Potenzreihen, welche in der Mathematik und als mathematisches Hilfmittel auch in den Natur- und Ingenieurwissenschaften eine große Rolle spielen, im Schulunterricht aber nicht vorkommen, werden thematisiert.*
- *Symmetrieverhalten und Verhalten im Unendlichen bei ganzrationalen Funktionen werden wiederholt und anschaulich gemacht.*
- *der sinnvolle Einsatz von CAS (oder GRT) wird geübt.*

Und zum Abschluss: eine Überraschung =)

Landkarte der Zugänge zur Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion

konservative Zugänge

revolutionäre Zugänge

AGG-Beweise

nicht-*AGG*-Beweise

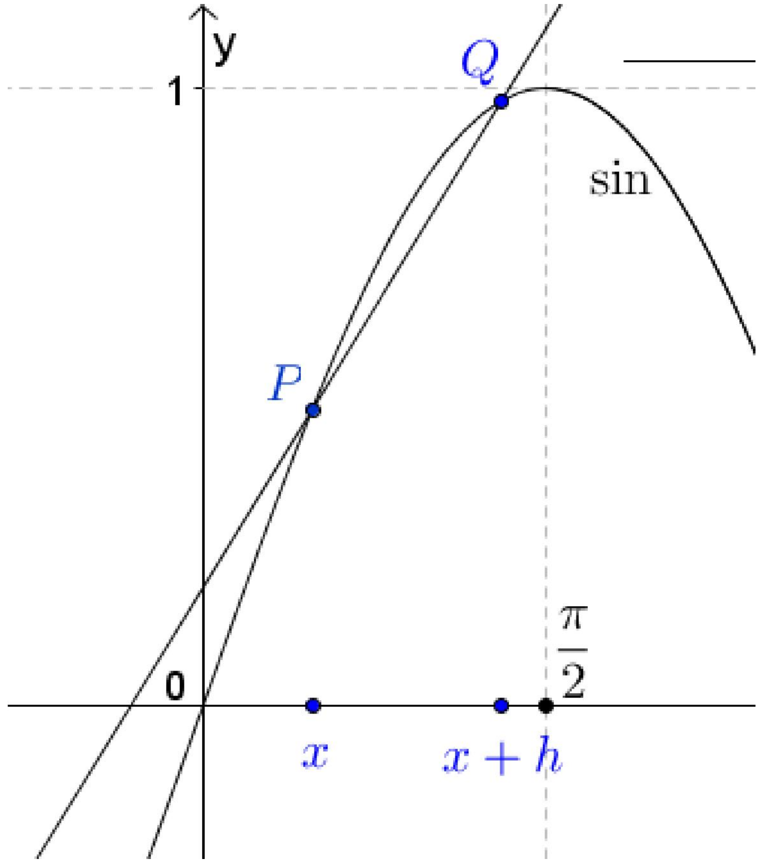
Der Klassiker

…

3 alternative Wege mit dem „Kosinus-Grenzwert“ umzugehen

Ein nicht-AGG-Beweis

<u>*1. Teil*</u>: Bestimme Steigung der *Sekante* durch $P(x|\sin(x))$ und $Q(x+h|\sin(x+h))$:

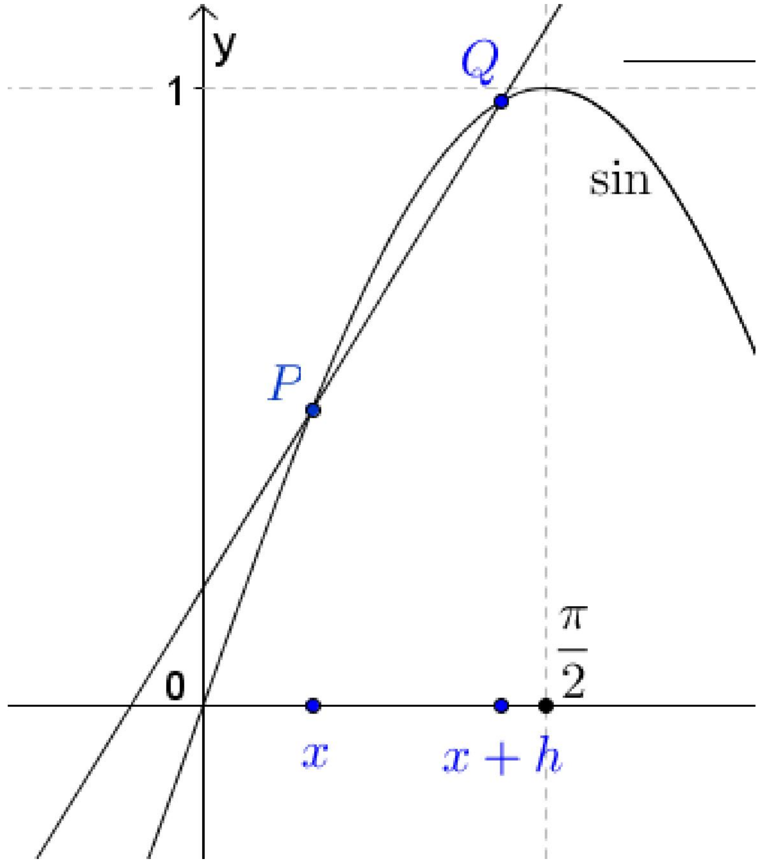


Vgl. Griesel et al. (2008): 87

Ein nicht-AGG-Beweis

<u>*1. Teil*</u>: Bestimme Steigung der *Sekante* durch $P(x|\sin(x))$ und $Q(x+h|\sin(x+h))$:

$$m_S = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

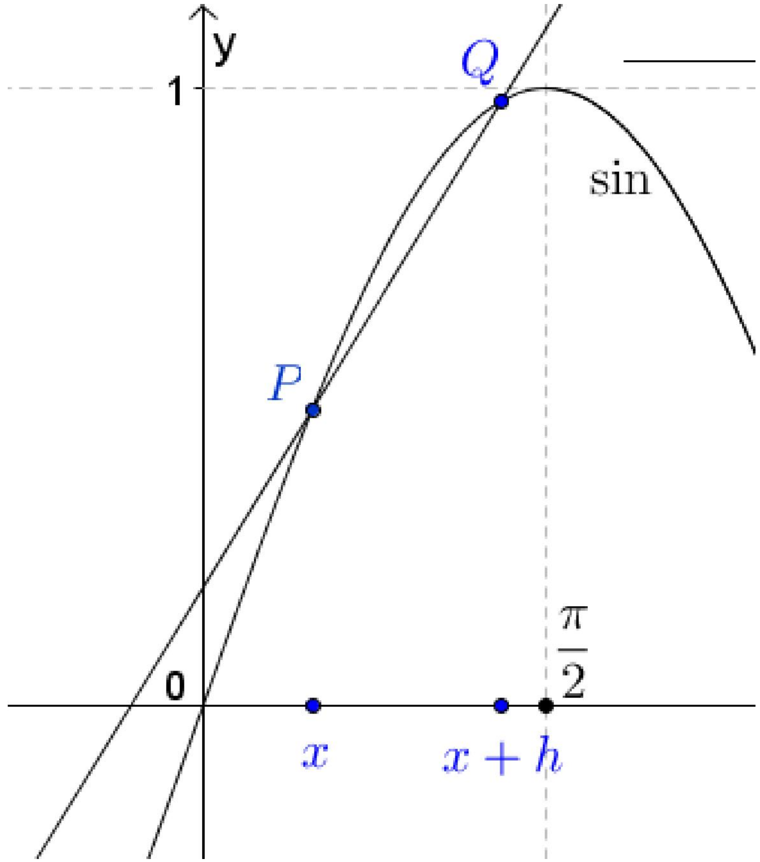


Ein nicht-AGG-Beweis

1. Teil: Bestimme Steigung der *Sekante* durch $P(x|\sin(x))$ und $Q(x+h|\sin(x+h))$:

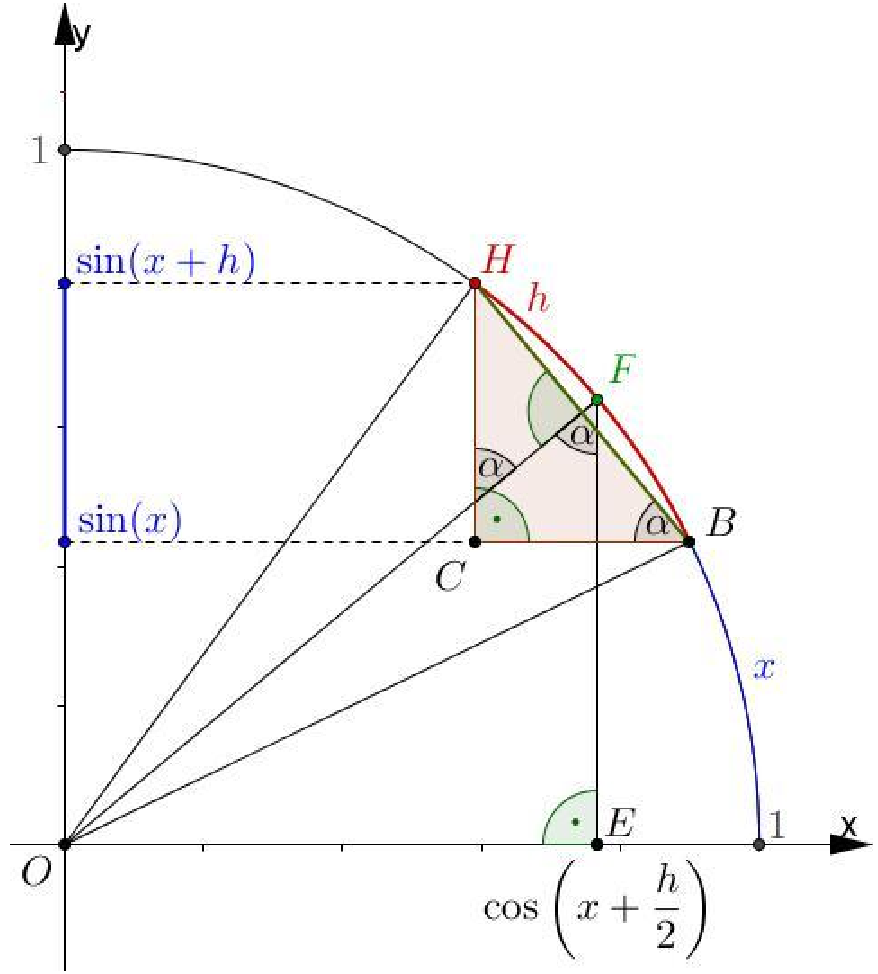
$$m_S = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

Betrachte $\sin(x+h)-\sin(x)$ am Einheitskreis exemplarisch für $(x+h)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.



Ein nicht-AGG-Beweis

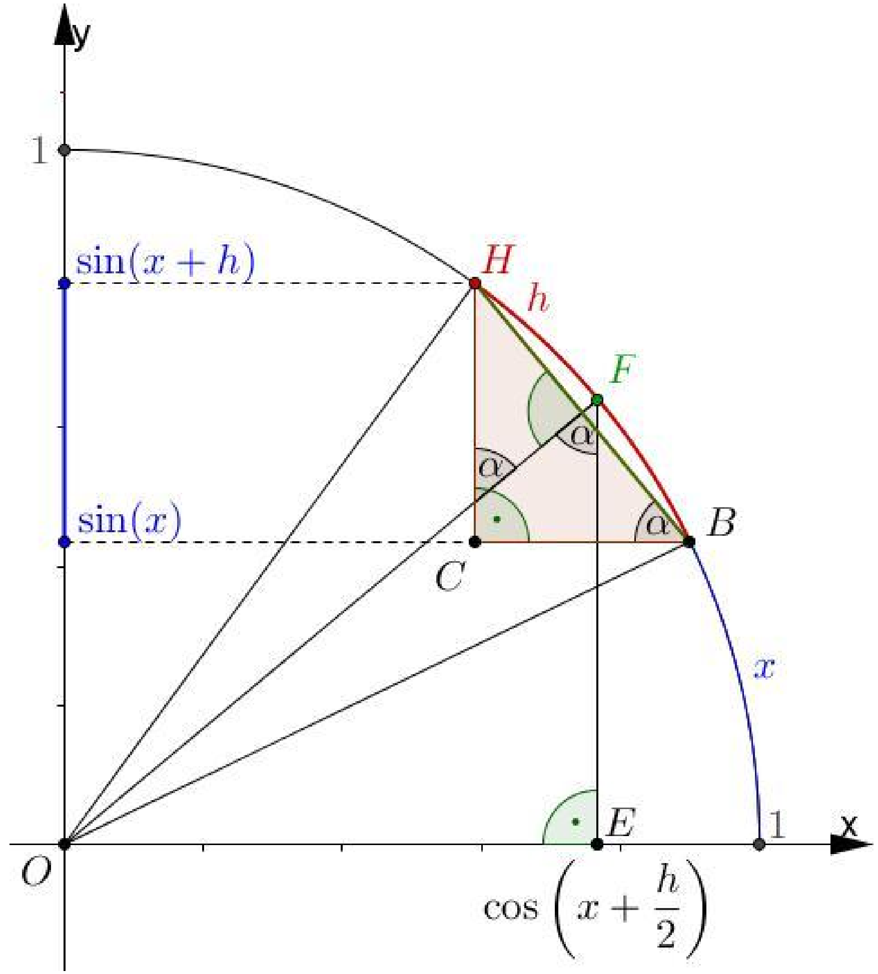
Da $\Delta(BCH)$ und $\Delta(OEF)$ ähnlich: $\dfrac{|CH|}{|BH|} = \dfrac{|OE|}{|OF|}$



Ein nicht-AGG-Beweis

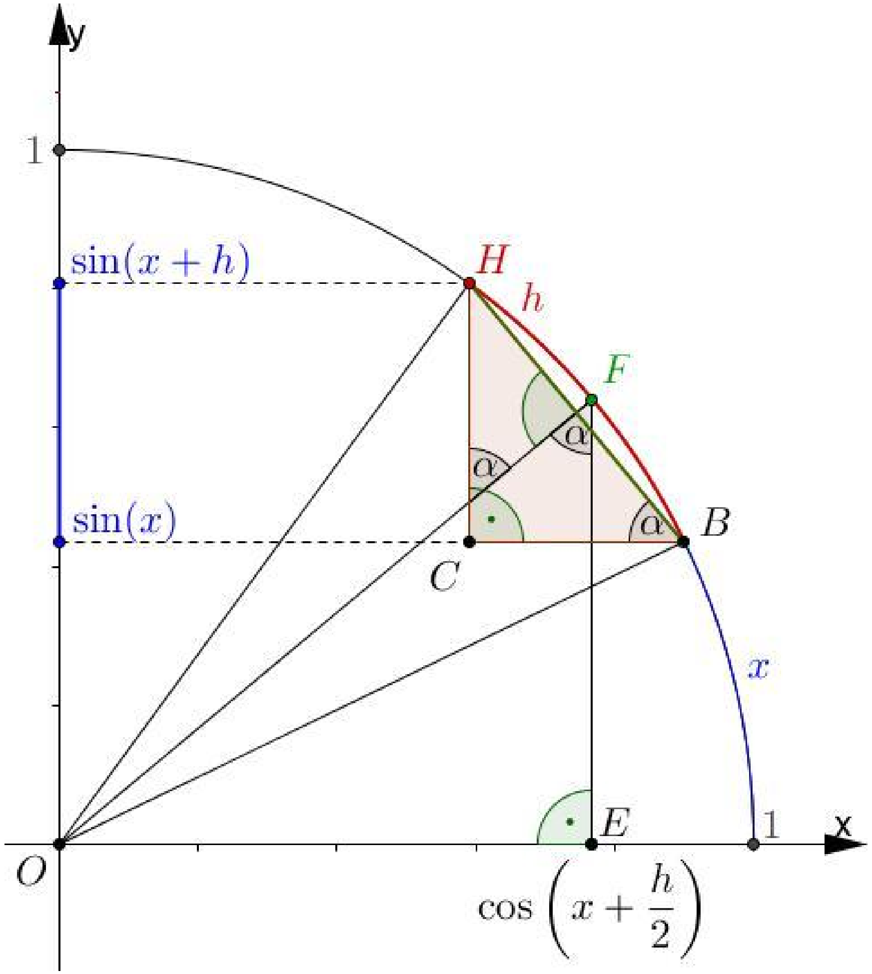
Da $\Delta(BCH)$ und $\Delta(OEF)$ ähnlich: $\dfrac{|CH|}{|BH|} = \dfrac{|OE|}{|OF|}$

Da $|CH| = \sin(x+h) - \sin(x)$,
$|OE| = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ und
$|OF| = 1$:



Ein nicht-AGG-Beweis

Da $\Delta(BCH)$ und $\Delta(OEF)$ ähnlich: $\dfrac{|CH|}{|BH|} = \dfrac{|OE|}{|OF|}$



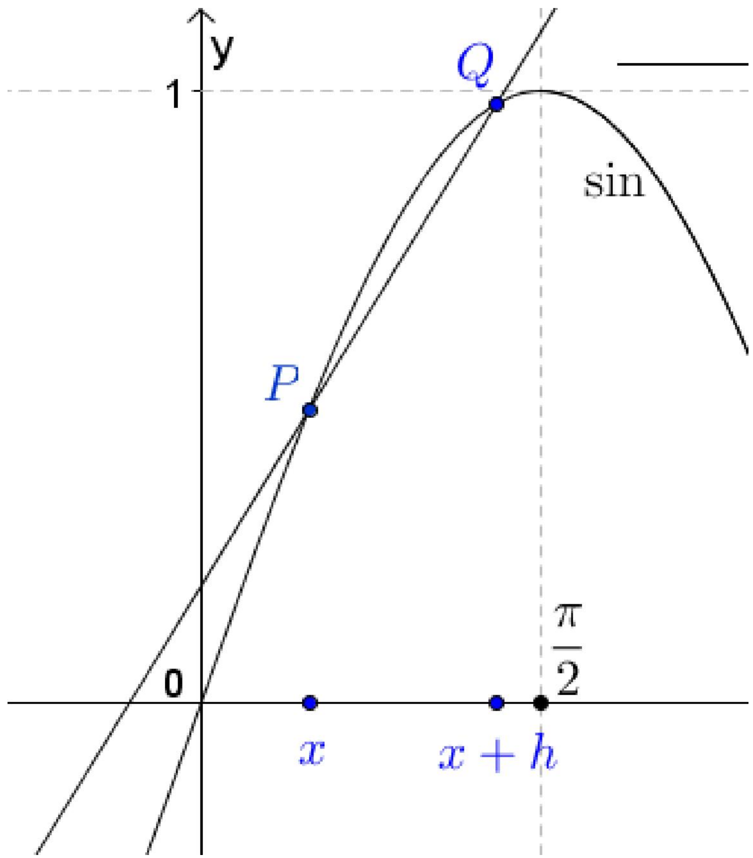
Da $|CH| = \sin(x+h) - \sin(x)$,
$|OE| = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ und
$|OF| = 1$:

$$\boxed{\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{|BH|} = \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{1}}$$

Ein nicht-AGG-Beweis

2. *Teil*: Bestimme Steigung der *Tangente* durch $P(x|\sin(x))$:

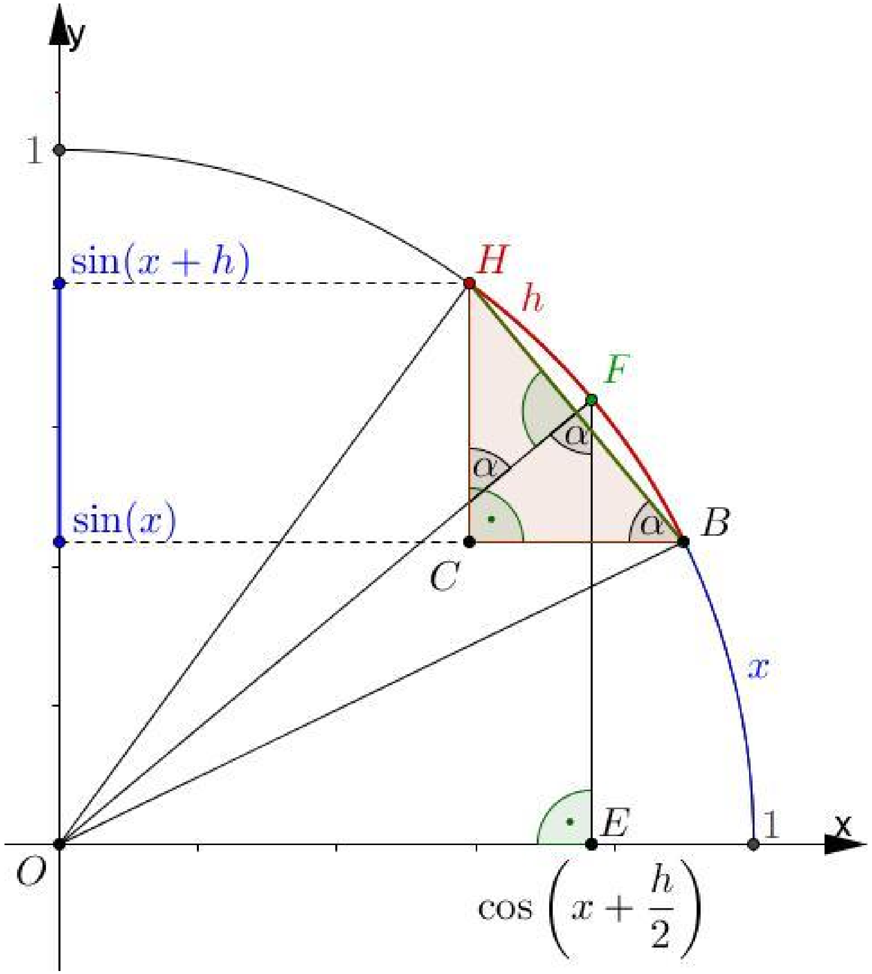
Für kleines $h > 0$



Ein nicht-AGG-Beweis

<u>*2. Teil*</u>: Bestimme Steigung der *Tangente* durch $P(x|\sin(x))$:

Für kleines $h > 0: |BH| \approx h$



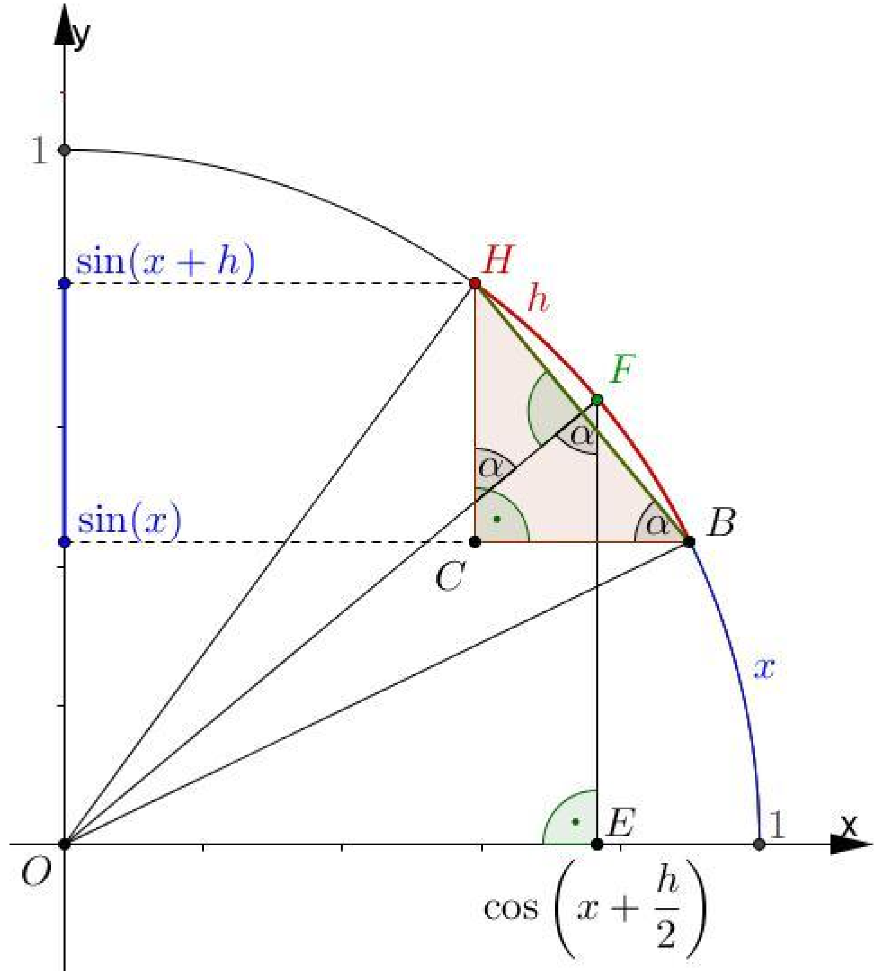
$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{|BH|} = \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{1}$$

Ein nicht-AGG-Beweis

<u>2. *Teil*</u>: Bestimme Steigung der *Tangente* durch $P(x|\sin(x))$:

Für kleines $h > 0: |BH| \approx h$

$$\sin'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$



$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{|BH|} = \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{1}$$

Ein nicht-AGG-Beweis

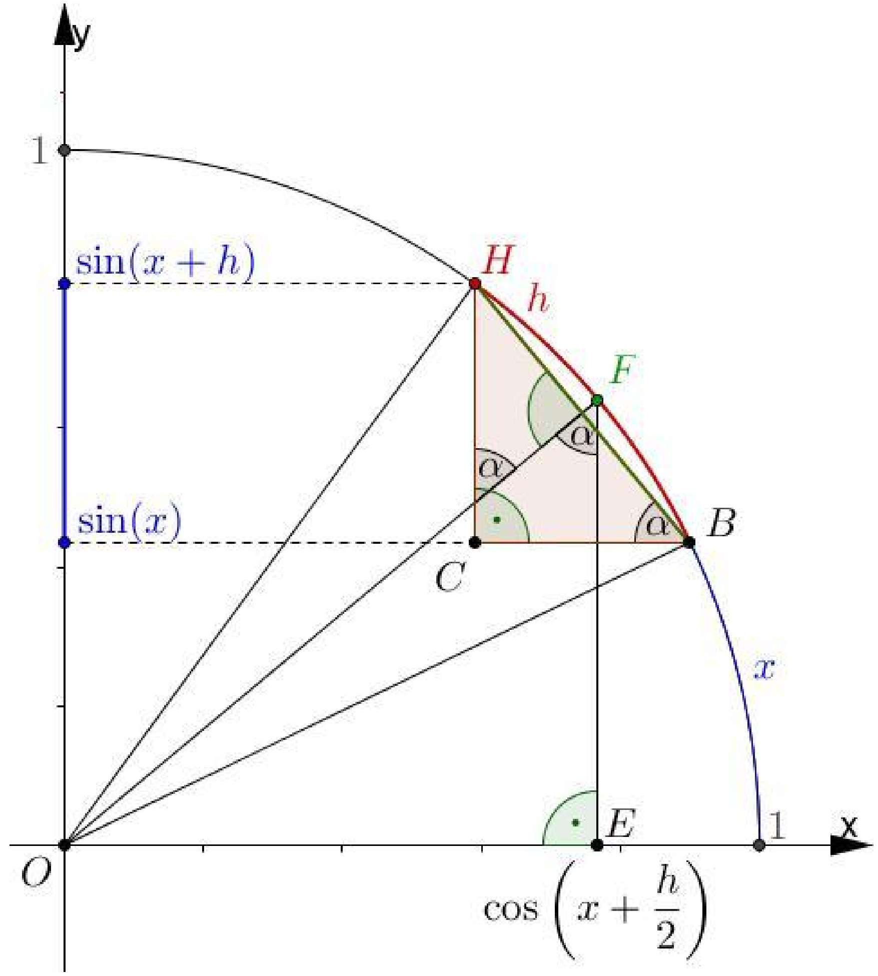
<u>*2. Teil*</u>: Bestimme Steigung der *Tangente* durch $P(x|\sin(x))$:

Für kleines $h > 0: |BH| \approx h$

$$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{|BH|}$$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{|BH|} = \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{1}$$



Ein nicht-AGG-Beweis

<u>2. *Teil*</u>: Bestimme Steigung der *Tangente* durch $P(x|\sin(x))$:

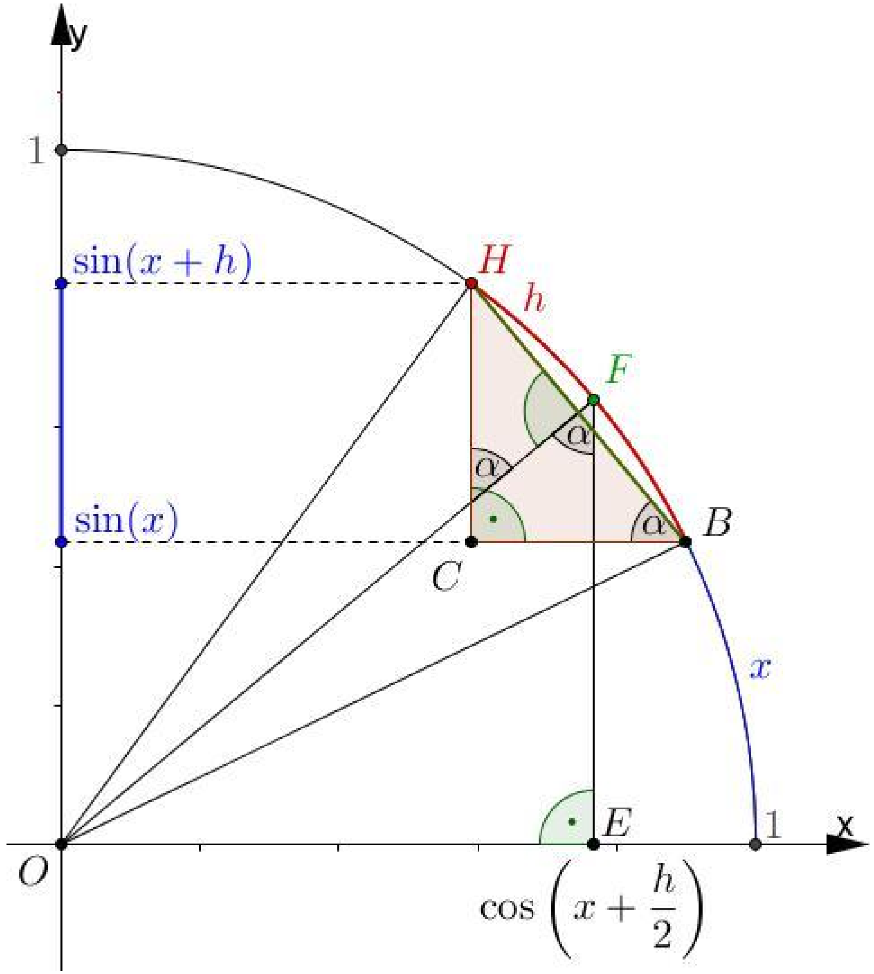
Für kleines $h > 0: |BH| \approx h$

$$\sin'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{|BH|}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{|BH|} = \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{1}}$$



Ein nicht-AGG-Beweis

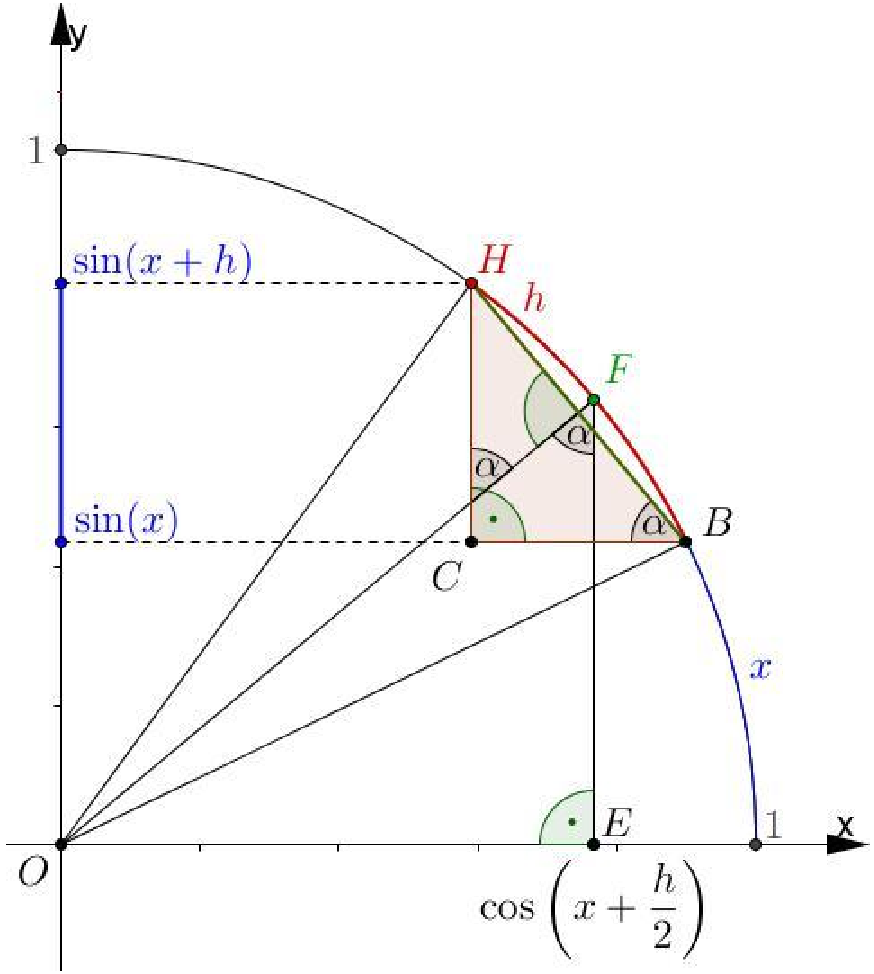
<u>2. *Teil*</u>: Bestimme Steigung der *Tangente* durch $P(x|\sin(x))$:

Für kleines $h > 0: |BH| \approx h$

$$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{|BH|}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos(x)$$



$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{|BH|} = \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{1}$$

Eine Reihe (evtl.) offener Fragen

(F1) Welcher Zugang zur Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion sollte für einen durchschnittlichen/sehr guten LK vorzugsweise aus welchen Gründen eingesetzt werden?

(F2) Sollten die Ableitungen der Sinus- und Kosinusfunktion im GK behandelt werden? Welcher Zugang eignet sich aus welchen Gründen am besten?

Und wofür braucht man das? Anwendungen

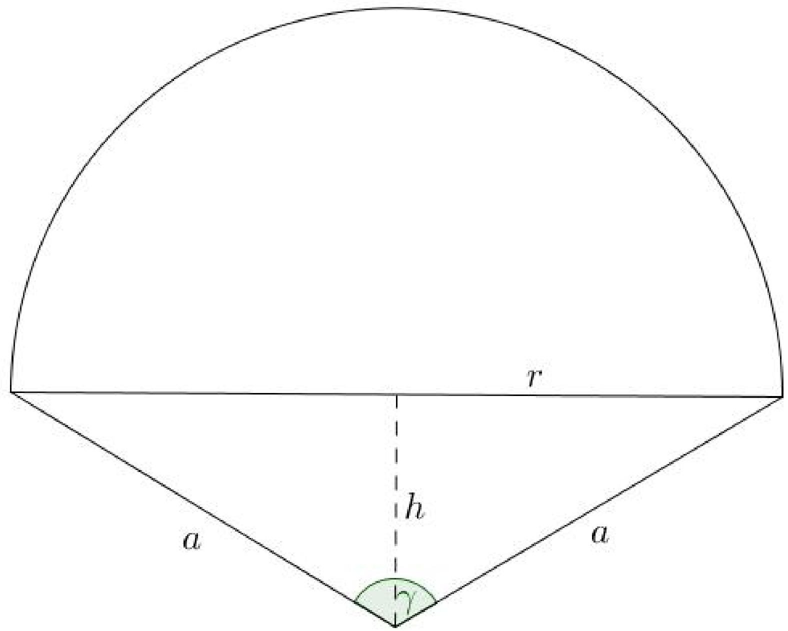
Die Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion kommt im Schulkontext typischerweise bei der Bearbeitung von *Extremwertaufgaben* zum Einsatz.

Ein anderes spannendes Feld sind *Modellierungen*.

Typische Extremwertaufgaben

Aufgabe 1:

Einem gleichschenkligen Dreieck soll an der Basis ein Halbkreis angefügt werden. Wie groß muss der Winkel γ sein, damit der Flächeninhalt von Dreieck und Kreis möglichst groß wird?



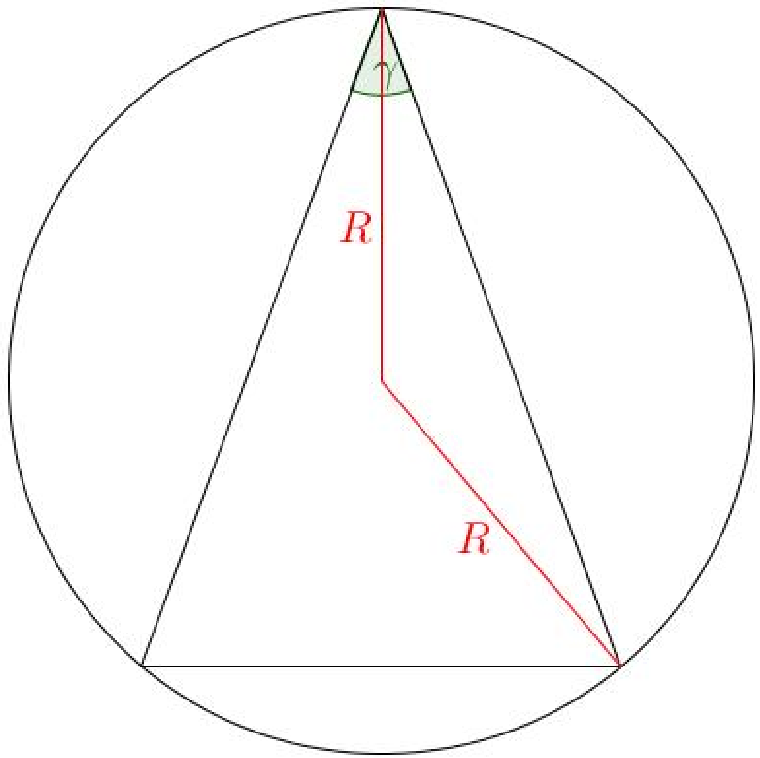
Vgl. Giesel et al. (2008): 184

Typische Extremwertaufgaben

<ins>*Aufgabe 2*</ins>:

Einer Kugel mit Radius *R* wird ein Kegel einbeschrieben.

Für welchen Öffnungswinkel γ ist seine Oberfläche maximal?



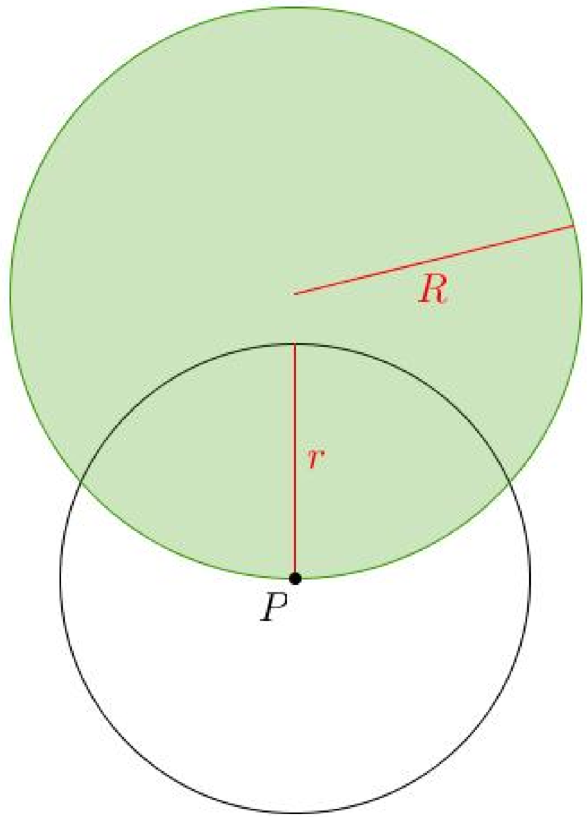
Internetquelle: http://sos-mathe.ch/pdfa/a53_6.pdf (letzter Zugriff: 29.06.2014)

Typische Extremwertaufgaben

<u>*Aufgabe 3*</u>:

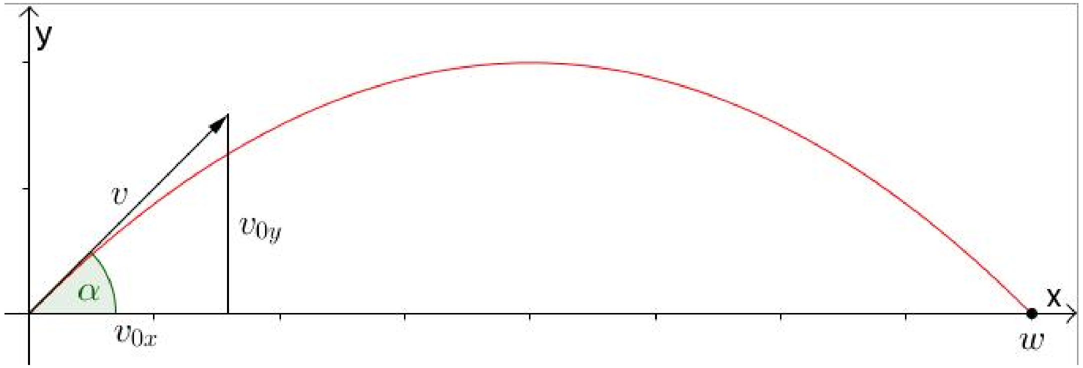
Problem der weidenden Ziege

Eine kreisförmige Rasenfläche mit dem Radius von fünf Metern soll genau zur Hälfte von einer Ziege abgegrast werden. Die Ziege ist mit einem Strick an einen Pflock angebunden, der am Rande des Kreises angeschlagen wurde. Wie lang muss der Strick sein, damit die Ziege genau die Hälfte der Rasenfläche abgrasen kann?



Vgl. Treiber (1991): 97

Typische Extremwertaufgaben



Aufgabe 4:

Der Weitsprung

Unter welchem Winkel α zur Horizontalen sollte man abspringen, um einen möglichst weiten Sprung zu erzielen (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes)?

(Absprunggeschwindigkeit v)

Vgl. Bigalke/Köhler (1998): 97

Literatur

Bigalke, A./ Köhler, N. (1998): *Mathematik 12.2 Leistungskurs*. Berlin: Cornelsen.

Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübigen Projektgruppe Mathematik SII, Freiburg (1981): *Mathematik. Studienbriefe zur Fachdidaktik für Lehrer der Sekundarstufe II. Winkelfunktionen und Schwingungsvorgänge. Analysis MA 5*. Tübingen.

Hering, H. (1983): *Zur Ableitung der* sin- *und* cos-*Funktion*. PM 25(8), 232-237.

Heuser, H. (2009): *Lehrbuch der Analysis Teil 1*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 17., aktualisierte Aufl.

Jost, C. (2010): *Ableitungen der Kosinus- und Sinusfunktion*. MNU 63(6), 333-336.

Griesel, H./ Gundlach, A./ Postel, H./ Suhr, F. (Hrsg.) (2008): *Elemente der Mathematik. Leistungskurs. Gesamtband Analysis*. Braunschweig: Schroedel.

Kirsch, A. (1979): *Anschauung und Strenge bei der Behandlung der Sinusfunktion und ihrer Ableitung*. MU 3, 51-71.

Kroll, W. (1976): *Eine elementare gemeinsame Begründung der Kreis- und Hyperbelfunktionen im Reellen*. Didaktik der Mathematik 4, 291-317.

Kroll, W. (1982): *Trigonometrie entwickelt aus der Kreisberechnung nach Archimedes. Ein Unterrichtskonzept*. PM 24(10), 1-17.

Pietrowiak, S./ Schulz, W. (1986): *Zum anwendungsbezogenen Arbeiten mit den Funktionen* sin *und* cos. Wiss. Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Math.-Nat- R. 35.8, 739-746.

Reuter, D. (1960): *Zur Herleitung von* lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\sin x}x = 1. PM 2(5), 125-127.

Richman, F. (1993): *A Circular Argument*. The College Mathematics Journal 24(2), 160-162.

Rose, D. A. (1991): *The Differentiability of Sin x*. The College Mathematics Journal 22(2), 139-142

Scharf, B. (2010a): *Aus 2 mach 1*. Wurzel 44(5), 99-105.

Schmid, A./ Schweizer, W. (2001): *LS Analysis. Leistungskurs Gesamtband*. Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig: Klett.

Schreiber, W. (1976): *Ableitung der trigonometrischen Funktionen*. PM 18, 98-100.

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin (2006): *Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe. Mathematik*. 1. Aufl.

Stark, E. (1984): *Zur Ableitung der* sin-*Funktion*. PM 26(2), 50-51.

Treiber, D. (1991): *Zum Problem der „Weidenden Ziege“*. PM 33(3), 97-100.

Vietoris, L. (1957): *Vom Grenzwert* \lim_{x\rightarrow\infty} \frac{\sin(x)}{x}. Elem. Math. 12, 8-10.

Zappe, W. (1989): *Bemerkungen zur Herleitung von (sin x)‘ = cos x*. Math. Schule 27(11), 795-799.