

Kritische Betrachtung des Tangentenproblems

1. Schritt: Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente
2. Schritt: Die Tangente als Grenzlage von Sekanten
- 3. Schritt: Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert**

Zum dritten Schritt

Hier wird gewöhnlich am Beispiel der Normalparabel (vorzugsweise an der Stelle $x_0 = 1$) die Annäherung durch benachbarte Sekanten algebraisch modelliert und der Grenzwert (in der Regel auf der Basis eines intuitiven Grenzwertbegriffs) berechnet.

Die klassische Verständnisschwierigkeit besteht hier darin, dass in der Sekantensteigung

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{im Beispiel } \frac{x^2 - 1}{x - 1})$$

Zähler und Nenner für $x \rightarrow x_0$ gegen null streben, der Quotient aber dennoch einen wohldefinierten Grenzwert hat (hier die Zahl 2 als Grenzwert des gekürzten Terms $x + 1$).

Die im zweiten Schritt skizzierte Fehldeutung („die Sehnen ziehen sich auf einen Punkt zusammen“) entspricht in gewisser Weise der Schwierigkeit, dem Differenzenquotienten einen Grenzwert zuzuschreiben. Hier trifft man sich mit dem auf Barrow² zurückgehenden Einwand, dass man mit der Voraussetzung $x \neq x_0$ beginnt (die Sekante braucht zwei (!) Punkte), um schließlich scheinbar doch $x = x_0$ zu setzen. Dies ist und bleibt ein schwieriger Punkt.

Zudem stützt sich das Verfahren auf ein (zumindest intuitives) Vorverständnis des Grenzwertbegriffs, auf das in der Regel nicht zurückgegriffen werden kann.¹ Die Lage wird noch dadurch verschärft, dass mit „Grenzwertbildung“ eher der Prozess der Annäherung als das idealisierte Endprodukt dieses Prozesses (Grenzwert als Zahl) gemeint ist.² Damit aber der dritte Schritt zur Problemlösung beitragen kann, ist die „Produktvorstellung“ unverzichtbar.

Unabhängig von den erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten ist auf ein unausweichliches Problem hinzuweisen: Sobald die Schüler den Term für die Sekantensteigung in der Hand haben, ist ihre ganze Aufmerksamkeit auf die notwendigen Termumformungen, d.h. auf die Algebra gerichtet. Der inhaltliche und begriffliche Kontext ist dann verschwunden.³