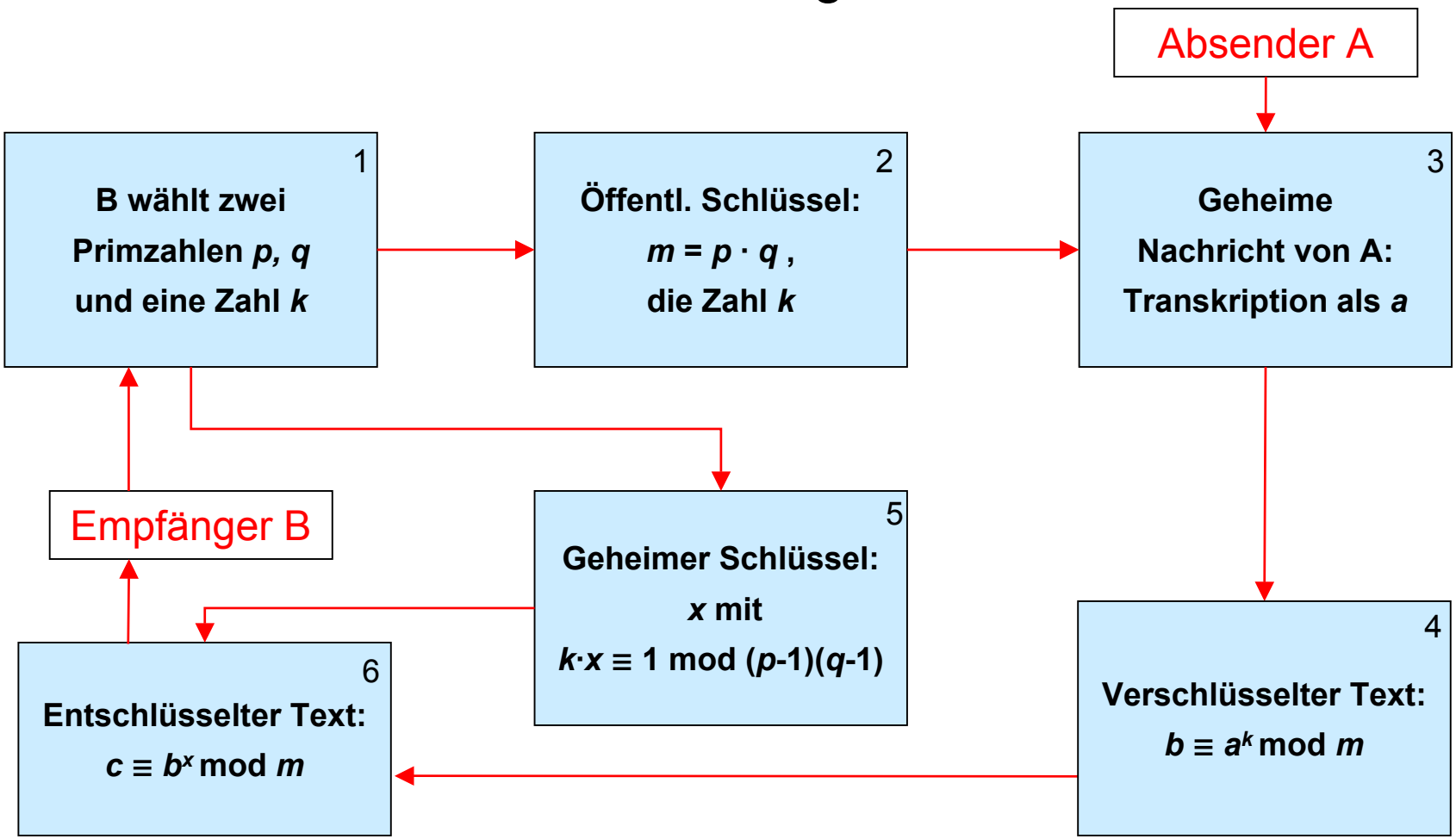
RSA-Verschlüsselungsverfahren



RSA-Verschlüsselungsverfahren

Public-Key-Kryptosystem

- Hierbei handelt es sich um ein Public-Key-Kryptosystem, d.h. im Gegensatz zu den klassischen Verschlüsselungsverfahren wird **asymmetrisch** chiffriert.

RSA-Verschlüsselungsverfahren

Ausgangslage

- Der Absender **A** möchte eine geheime Nachricht an den Empfänger **B** übermitteln.

  Dabei besteht die **Asymmetrie** darin, dass **A** und **B** sich weder zu kennen noch irgendwie geheim zu einem Schlüsselaustausch zu treffen brauchen.

RSA-Verschlüsselungsverfahren

Vorbereitungen

- **B** wählt zwei „große“, d.h. etwa 200-stellige Primzahlen *p, q,* welche **geheim** gehalten werden.
- **B** berechnet $m = p \cdot q$.
- **B** bestimmt eine natürliche Zahl *k*, die zu $n = (p - 1)\cdot(q - 1)$ teilerfremd ist.
- **B** übermittelt **öffentlich** die Daten *m* und *k* ; insbesondere **A** empfängt diese.

RSA-Verschlüsselungsverfahren

Vorgehen von A

- **A** stellt die zu übermittelnde Nachricht als natürliche Zahl a $(0 < a < m)$ dar.
- **A** übermittelt öffentlich den Rest $b \equiv a^k \bmod m$.

RSA-Verschlüsselungsverfahren

Vorgehen von B

- **B** empfängt die Nachricht $b \equiv a^k \bmod m$.
- **B** bestimmt ganze Zahlen x und y mit der Eigenschaft $k \cdot x = 1 + n \cdot y$.
- **B** berechnet $c \equiv b^x \bmod m$.
- **B hat damit die Nachricht entschlüsselt,** denn es gilt $\boldsymbol{c = a}$ (kleiner Satz von Fermat).

RSA-Verschlüsselungsverfahren

Ein einfaches Beispiel

- **B** wählt: $p = 229$, $q = 389$,
  also $m = p \cdot q = 89081$,
  $n = (p - 1)\cdot(q - 1) = 88464$; $k = 43$.
- **B** gibt bekannt: $m = 89081$, $k = 43$.
- Geheime Nachricht: $a = 666$.
- **A** übermittelt: $b \equiv a^k \bmod m$, d.h. $b = 42709$.
- **B** bestimmt ganze Zahlen x, y mit
  $k \cdot x = 1 + n \cdot y$, nämlich $x = 67891$, $y = 33$.
- **B** entschlüsselt: $c \equiv b^x \bmod m$, d.h. $c = 666 = a$.

RSA: Ein realistischeres Beispiel

Absender A

1

B wählt:

p = 153249554086588885835834702715030918361873935752883763

q = 153249554086588885835834702715030918361897446794836651

k = 43

2

Öffentlicher Schlüssel:

$m = p \cdot q$ = 348542582773832278894805967893370273760435759089067914715982453295254732694409469345991159712006539513837291

k = 43

3

Geheime Nachricht:

WISTA, d.h.

a = 8773838465

4

Verschlüsselter Text:

$b \equiv a^k \bmod m$, d.h.

b = 2069369459745288608752250133879157070278832668743701557806005040110336170977477240448437135065259405322647

5

Geheimer Schlüssel:

$k \cdot x = 1 + n \cdot y$, d.h.

x = 491555424301499977930356403979163563869404469376282816178127080753016972301737721714088993920962359448084099

6

Entschlüsselter Text:

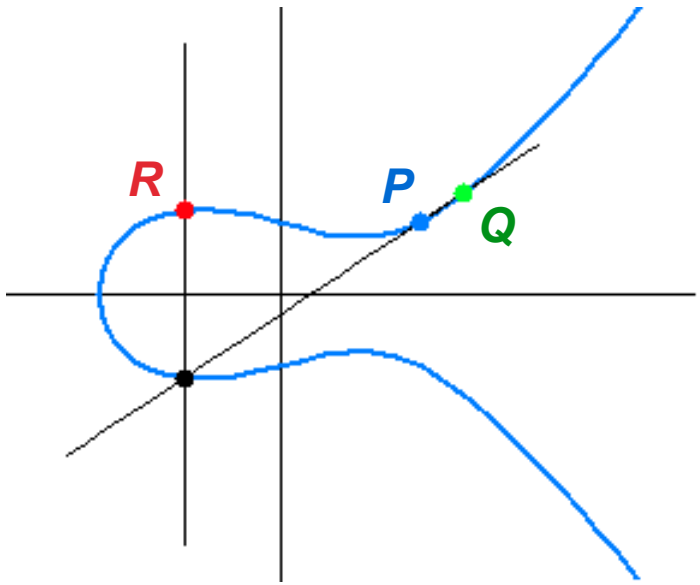
$c \equiv b^x \bmod m$, d.h.

$c = a$, d.h.

WISTA

Empfänger B

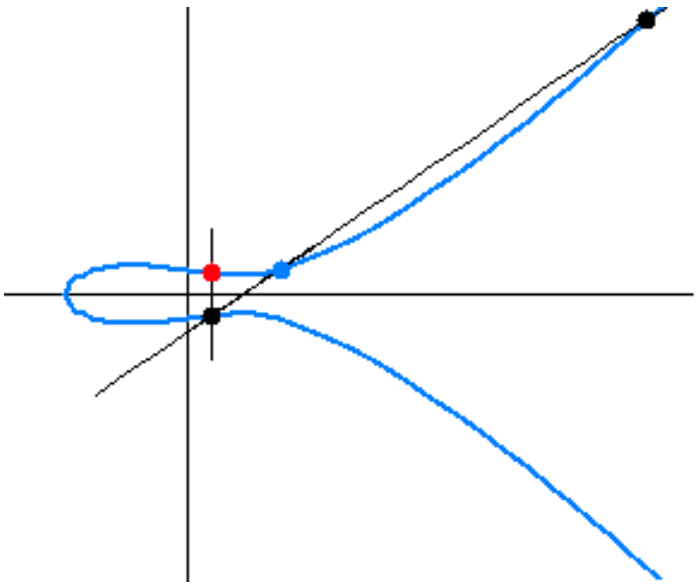
Elliptische Kurven in der Kryptographie



Punkte auf elliptischen Kurven können „addiert“ werden:

$R = P + Q$

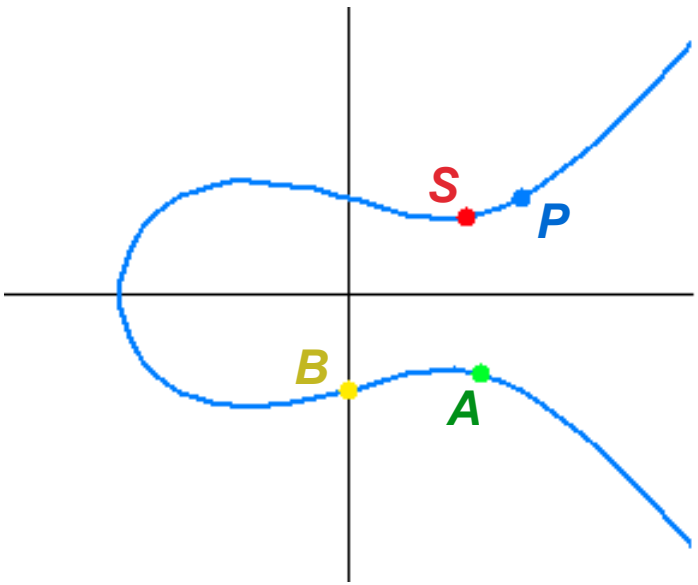
Das diskrete Logarithmusproblem



- Indem man einen Punkt ***P*** *n*-mal zu sich selbst addiert, erhält man den Punkt ***Q*** = *n* ***P***.
- Hat man umgekehrt nur das Ergebnis ***Q*** und den Basispunkt ***P*** vorgegeben, so besteht das diskrete Logarithmusproblem darin, den Faktor *n* zu berechnen.
- Diese Aufgabe ist bis heute nicht in kurzer Zeit lösbar.

Beispiel: ***Q*** = *6* ***P***

Anwendung:
Schlüsselaustausch nach Diffie-Hellman



- Alice und Bob einigen sich auf Punkt ***P***.
- Alice wählt *n* und schickt Bob ***A*** = *n* ***P***.
- Bob wählt *m* und schickt Alice ***B*** = *m* ***P***.
- Alice und Bob berechnen

  S = *n m* ***P*** = *n* ***B*** = *m* ***A***.
- Charly, der die beiden belauscht, kennt nur ***A***, ***B*** und ***P***, kann damit aber **nicht** den **geheimen Schlüssel *S*** bestimmen, denn dazu müsste er *n* oder *m* berechnen können.

Ein höherdimensionales Beispiel...

$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{21}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{01}(x)\vartheta_{20}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{13}(x)\vartheta_{32}(x)(-2)\vartheta_{12}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{21}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{01}(x)\vartheta_{20}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{12}(x)\vartheta_{33}(x)(-2)\vartheta_{12}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{01}(x)\vartheta_{13}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{21}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{20}(x)\vartheta_{32}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{22}(x)\vartheta_{30}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{10}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{12}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{10}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{23}(x)\vartheta_{31}(x)(-2)\vartheta_{21}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{01}(x)\vartheta_{13}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{03}(x)\vartheta_{11}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{20}(x)\vartheta_{32}(x)(-2)\vartheta_{21}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{12}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{10}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{21}(x)\vartheta_{33}(x)(-2)\vartheta_{21}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{30}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{20}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{13}(x)\vartheta_{23}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{01}(x)\vartheta_{31}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{32}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{12}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{20}(0)$$
$$0 = \vartheta_{01}(x)\vartheta_{31}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{32}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{21}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{20}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{30}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{03}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{20}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{10}(0)\vartheta_{20}(0)$$
$$0 = \vartheta_{10}(x)\vartheta_{13}(x)(-2)\vartheta_{30}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{20}(x)\vartheta_{23}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{03}(0) + \vartheta_{21}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{02}(0)$$
$$0 = \vartheta_{10}(x)\vartheta_{13}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{03}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{12}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{02}(0) + \vartheta_{20}(x)\vartheta_{23}(x)(-2)\vartheta_{30}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{03}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{02}(0) + \vartheta_{01}(x)\vartheta_{02}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{03}(0) + \vartheta_{31}(x)\vartheta_{32}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{30}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{03}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{03}(0) + \vartheta_{01}(x)\vartheta_{02}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{02}(0) + \vartheta_{30}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{30}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{02}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{03}(x)\vartheta_{23}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{13}(x)\vartheta_{33}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{30}(0)$$
$$0 = \vartheta_{02}(x)\vartheta_{22}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{03}(x)\vartheta_{23}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{12}(x)\vartheta_{32}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{30}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{20}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{01}(x)\vartheta_{21}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{31}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{10}(0)\vartheta_{30}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{20}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{01}(x)\vartheta_{21}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{30}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{10}(0)\vartheta_{30}(0)$$
$$0 = \vartheta_{01}(x)\vartheta_{11}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{03}(x)\vartheta_{13}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{23}(x)\vartheta_{33}(x)(-2)\vartheta_{20}(0)\vartheta_{30}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{10}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{12}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{22}(x)\vartheta_{32}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{20}(0)\vartheta_{30}(0)$$
$$0 = \vartheta_{01}(x)\vartheta_{11}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{03}(x)\vartheta_{13}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{21}(x)\vartheta_{31}(x)(-2)\vartheta_{20}(0)\vartheta_{30}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{10}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{12}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{20}(x)\vartheta_{30}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{20}(0)\vartheta_{30}(0)$$
$$0 = \vartheta_{20}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{30}(x)\vartheta_{32}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{02}(0) + \vartheta_{31}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{03}(0)$$
$$0 = \vartheta_{20}(x)\vartheta_{22}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{02}(0) + \vartheta_{21}(x)\vartheta_{23}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{03}(0) + \vartheta_{30}(x)\vartheta_{32}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{12}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{02}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{03}(0) + \vartheta_{01}(x)\vartheta_{03}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{02}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{13}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{10}(0)\vartheta_{12}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{02}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{02}(0) + \vartheta_{01}(x)\vartheta_{03}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{03}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{12}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{10}(0)\vartheta_{12}(0)$$
$$0 = \vartheta_{10}(x)\vartheta_{11}(x)(-2)\vartheta_{20}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{30}(x)\vartheta_{31}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{01}(0) + \vartheta_{32}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{03}(0)$$
$$0 = \vartheta_{10}(x)\vartheta_{11}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{01}(0) + \vartheta_{12}(x)\vartheta_{13}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{03}(0) + \vartheta_{30}(x)\vartheta_{31}(x)(-2)\vartheta_{20}(0)\vartheta_{21}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{01}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{03}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{03}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{01}(0) + \vartheta_{22}(x)\vartheta_{23}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{20}(0)\vartheta_{21}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{01}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{01}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{03}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{03}(0) + \vartheta_{20}(x)\vartheta_{21}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{20}(0)\vartheta_{21}(0)$$

$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{03}(x)\vartheta_{30}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{12}(0)\vartheta_{21}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{33}(x)(-2)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{03}(x)\vartheta_{30}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{12}(x)\vartheta_{21}(x)(-2)\vartheta_{12}(0)\vartheta_{21}(0)$$
$$0 = \vartheta_{01}(x)\vartheta_{12}(x)(-2)\vartheta_{20}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{20}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{22}(x)\vartheta_{31}(x)(-2)\vartheta_{03}(0)\vartheta_{10}(0)$$
$$0 = \vartheta_{03}(x)\vartheta_{10}(x)(-2)\vartheta_{20}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{20}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{22}(x)\vartheta_{31}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{12}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{13}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{11}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{23}(x)\vartheta_{30}(x)(-2)\vartheta_{20}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{13}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{11}(x)(-2)\vartheta_{03}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{21}(x)\vartheta_{32}(x)(-2)\vartheta_{20}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{02}(x)\vartheta_{21}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{32}(x)(-2)\vartheta_{03}(0)\vartheta_{20}(0)$$
$$0 = \vartheta_{03}(x)\vartheta_{20}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{32}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{21}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{23}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{01}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{13}(x)\vartheta_{30}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{23}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{01}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{03}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{12}(x)\vartheta_{31}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{02}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{10}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{21}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{13}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{30}(0)$$
$$0 = \vartheta_{01}(x)\vartheta_{30}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{13}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{21}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{31}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{10}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{20}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{12}(x)\vartheta_{23}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{31}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{03}(x)\vartheta_{32}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{20}(x)(-2)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{21}(0)$$
$$0 = \vartheta_{01}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{12}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{23}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{12}(x)\vartheta_{20}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{01}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{30}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{23}(x)(-2)\vartheta_{12}(0)\vartheta_{20}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{32}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{12}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{13}(x)\vartheta_{21}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{33}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{32}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{03}(x)\vartheta_{31}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{12}(0)\vartheta_{20}(0)$$
$$0 = \vartheta_{01}(x)\vartheta_{23}(x)(-2)\vartheta_{12}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{32}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{20}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{12}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{32}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{21}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{22}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{01}(x)\vartheta_{23}(x)(-2)\vartheta_{02}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{12}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{20}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{22}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{02}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{01}(x)\vartheta_{23}(x)(-2)\vartheta_{03}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{32}(x)(-2)\vartheta_{12}(0)\vartheta_{30}(0)$$
$$0 = \vartheta_{02}(x)\vartheta_{13}(x)(-2)\vartheta_{21}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{20}(x)\vartheta_{31}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{22}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{10}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{11}(x)(-2)\vartheta_{21}(0)\vartheta_{30}(0) + \vartheta_{20}(x)\vartheta_{31}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{22}(x)\vartheta_{33}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{03}(0)\vartheta_{12}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{11}(x)(-2)\vartheta_{03}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{13}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{22}(x)\vartheta_{33}(x)(-2)\vartheta_{21}(0)\vartheta_{30}(0)$$
$$0 = \vartheta_{00}(x)\vartheta_{11}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{01}(0)\vartheta_{10}(0) + \vartheta_{02}(x)\vartheta_{13}(x)(-2)\vartheta_{03}(0)\vartheta_{12}(0) + \vartheta_{20}(x)\vartheta_{31}(x)(-2)\vartheta_{21}(0)\vartheta_{30}(0)$$
$$0 = \vartheta_{02}(x)\vartheta_{23}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{12}(0)\vartheta_{33}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{31}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{11}(x)\vartheta_{30}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{20}(0)$$
$$0 = \vartheta_{02}(x)\vartheta_{23}(x)\cdot 2\cdot\vartheta_{00}(0)\vartheta_{21}(0) + \vartheta_{03}(x)\vartheta_{22}(x)(-2)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{20}(0) + \vartheta_{10}(x)\vartheta_{31}(x)(-2)\vartheta_{12}(0)\vartheta_{33}(0)$$