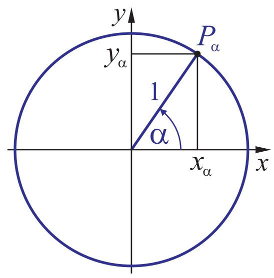
Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2016

# Parametrisierte Kurven und Animationen in GeoGebra

### Parameterdarstellungen von Kreisen

Parameterdarstellungen von Kreisen in der Ebene erhält man aus den Definitionen der Sinus- und der Kosinusfunktion am Einheitskreis: $\sin\alpha = y_\alpha$, $\cos\alpha = x_\alpha$.



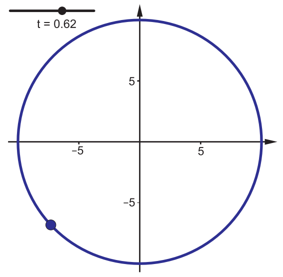




Abbildung 1: Sinus und Kosinus am Einheitskreis (links)

Abbildung 2: Animation eines Punktes auf einer Kreisbahn in GeoGebra (rechts)

Eine Verallgemeinerung auf Kreise mit beliebigen Radien $r$ ist leicht möglich. Es ergibt sich daraus die Parameterdarstellung

$$x(\alpha) = r \cdot \cos\alpha\,, \quad y(\alpha) = r \cdot \sin\alpha\,; \quad \alpha \in [0; 2\pi)$$

eines Kreises der Ebene, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Normierte Parameterintervalle können die Übersicht bei der Beschreibung mehrerer Eigenschaften erleichtern. Dazu ist der Parameter $\alpha$ durch $2\pi t$ mit $t \in [0; 1)$ zu ersetzen; man erhält die Parameterdarstellung

$$x(t) = r \cdot \cos(2\pi \cdot t)\,, \quad y(t) = r \cdot \sin(2\pi \cdot t)\,; \quad t \in [0; 1).$$

Durch die Addition von Mittelpunktskoordinaten lässt sich diese Parameterdarstellung für beliebige Kreise in der Ebene verallgemeinern:

$$x(t) = r \cdot \cos(2\pi \cdot t) + x_M\,, \quad y(t) = r \cdot \sin(2\pi \cdot t) + y_M\,; \quad t \in [0; 1).$$

Um mithilfe von GeoGebra einen (als kleinen Kreis dargestellten) Punkt auf diesem Kreis (mit dem Radius $r = 10$) zu bewegen, ist ein durch einen *Schieberegler* beschriebener *Parameter t* einzuführen und

```
(10*cos(2*pi*t), 10*sin(2*pi*t))
```

einzugeben. Die Bahnkurve wird als Parameterkurve definiert, hier mittels:

```
Kurve[10*cos(2*pi*t), 10*sin(2*pi*t), t, 0, 1]
```

Parameterdarstellungen von Kreisen im Raum, die auf Koordinatenebenen oder dazu parallelen Ebenen liegen, lassen sich daraus ableiten, indem eine der drei Raumkoordinaten als Konstante dargestellt wird. Im 3D-Modul von GeoGebra wird dazu einfach eine zusätzliche Koordinate eingefügt (im Folgenden kursiv hervorgehoben). Mit

`(10*cos(2*pi*t), 10*sin(2*pi*t), `***0***`)`

für den animierten Punkt und

`Kurve[10*cos(2*pi*t), 10*sin(2*pi*t),`***0***`,t, 0, 1]`

für die Bahnkurve entsteht eine Animation, von der in Abb. 3 eine Momentaufnahme dargestellt ist.

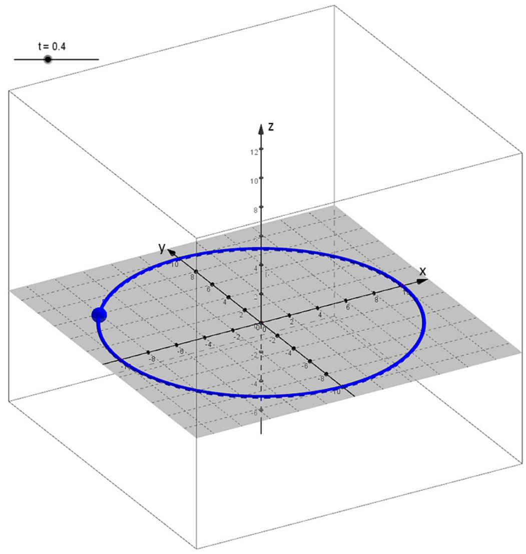



Abbildung 3: Animation auf einer Kreisbahn in der $x$-$y$-Ebene (GeoGebra 3D)

**Spiralen und Schraubenlinien**

Ausgehend von den Parametergleichungen von Kreisen stellen sich folgende Fragen:

1. Welche Kurve beschreibt ein Punkt, der sich um ein Zentrum bewegt und sich dabei gleichzeitig von dem Zentrum entfernt?

2. Welche Kurve beschreibt ein Punkt, der sich um ein Zentrum bewegt und simultan dazu seine Höhe (beschrieben z. B. durch die $z$-Koordinate) verändert?

Für die Realisierung der in der Frage 1 genannten Eigenschaft ersetzt man die Konstante $r$, die in der Parameterdarstellung eines Kreises den Radius beschreibt, durch eine Funktion $r(t)$ des Zeitparameters $t$. So führt z. B. die Ersetzung von $r$ durch $r \cdot t$ oder $r \cdot (1-t)$ dazu, dass sich der Abstand zum Mittelpunkt im Verlauf der Animation gleichmäßig von 0 auf $r$ erhöht bzw. von $r$ auf 0 verringert (für $t \in [0;1]$). Durch diese Überlegung ergibt sich die Parameterdarstellung einer ***archimedischen Spirale*** (siehe Abb. 4):[1]

$$x(t) = r \cdot (1-t) \cdot \cos(4\pi t)\,, \quad y(t) = r \cdot (1-t) \cdot \sin(4\pi t)\,; \quad t \in [0;1].$$

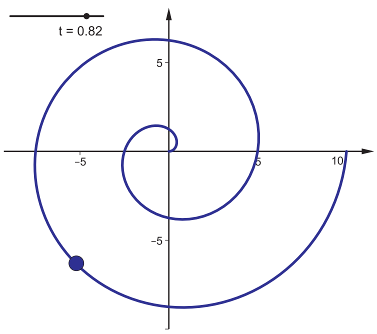



Abbildung 4: Archimedische Spirale

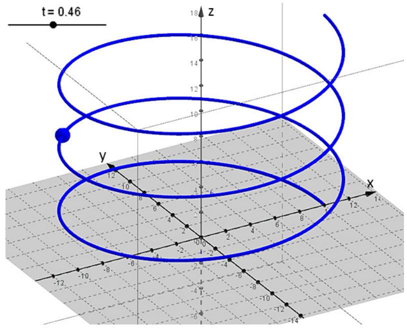



Abbildung 5: Schraubenlinie

Für die Realisierung der in der Frage 2 genannten Eigenschaft ist die vorher konstant gehaltene dritte Koordinate durch eine Funktion des Parameters zu ersetzen ist. Wird dafür eine lineare Funktion gewählt (im einfachsten Falle z. B. $z = h \cdot t$, falls sich während der Animation die „Höhe“ eines Punktes gleichmäßig von 0 auf $h$ verändern soll), so entsteht aus der Kreisgleichung die Gleichung einer ***Schraubenlinie*** bzw. ***Helix***, siehe Abb. 5:

$$x(t) = r \cdot \cos(6\pi t)\,, \quad y(t) = r \cdot \sin(6\pi t)\,, \quad z(t) = h \cdot t\,; \quad t \in [0;1]$$

Durch die Kombination der aus den Fragen 1 und 2 resultierenden Überlegungen (parameterabhängige Beschreibungen des Radius und der „Höhe“ in der ursprünglichen Parameterdarstellung eines Kreises) ergibt sich bei Verwendung linearer Funktionen in $t$ eine ***konische Spirale***:

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot (1-t) \cdot \cos(6\pi t) \\ y(t) &= r \cdot (1-t) \cdot \sin(6\pi t) \\ z(t) &= h \cdot t \end{aligned}$$

(mit $t \in [0;1]$).

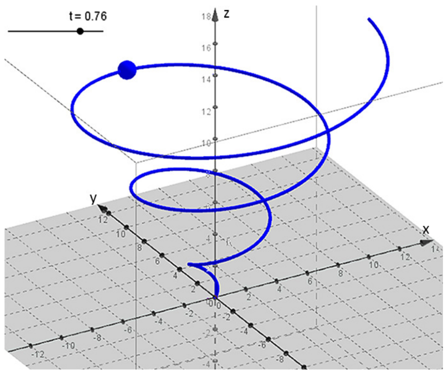



Abbildung 6: Konische Spirale

**Schräger Wurf**

Die schräge bzw. schiefe Wurf kann als eine aus einer gleichförmigen und einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung zusammengesetzte Bewegung aufgefasst werden. Als Summe einer in $t$ linearen Komponente und des mit $t^2$ multiplizierten Beschleunigungsvektors ergibt sich die Gleichung

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \tfrac{1}{2}\,\vec{g} \cdot t^2$$

[1] Eine sinnvolle Veränderung gegenüber der Beschreibung des Kreises, von der ausgegangen wurde, betrifft die Terme, von denen der Sinus und der Kosinus gebildet werden. Bei Spiralen und Schraubenlinien ist es oft erwünscht, mehr als eine Umdrehung zurückzulegen, weshalb $\cos(2\pi t)$ und $\sin(2\pi t)$ z. B. durch $\cos(4\pi t)$ und $\sin(4\pi t)$ ersetzt werden.

des schrägen Wurfes. Mit GeoGebra lässt sich eine entsprechende Animation auf einfache Weise durch Einfügen eines durch einen Schieberegler beschriebenen Parameters $t$ und eines davon abhängigen Punktes mit den Koordinaten $\left(10\,t\,\middle|\,10\,t-\frac{9{,}81}{2}t^2\right)$ erstellen (mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0=\binom{10}{10}$ und dem Abwurfpunkt im Koordinatenursprung, siehe Abb. 7). Zusätzlich wurde mittels

```
Kurve[10*t,10*t+(-9.81)/2*t^2,t,0,1]
```

die Bahnkurve (Wurfparabel) dargestellt.

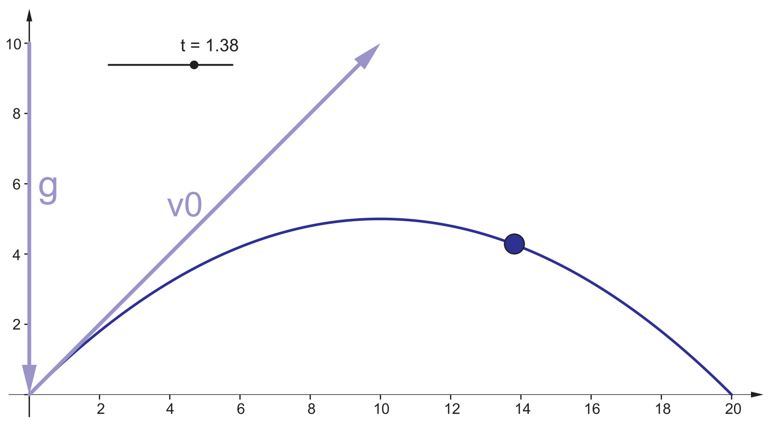



Abbildung 7: Animation des schrägen Wurfes mithilfe von GeoGebra