Kinematisch-funktionales Denken fördern –

Entwicklung und Erprobung einer GPS-basierten Lerneinheit zum Repräsentationstransfer

Masterarbeit

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik

eingereicht von: Julia Merck
geboren: 02.01.1987
betreut durch: Prof. Dr. Filler, Dr. Hoffkamp

Berlin, den 21.05.2013

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Filler dafür, dass er mich zu dieser Arbeit motiviert hat. Ihm und Frau Dr. Hoffkamp möchte ich meinen besonderen Dank dafür aussprechen, dass sie sich die Zeit für Gespräche über die Lerneinheit genommen haben und mich bei der Suche nach Literatur unterstützten.
Auch bei meinen Schülern aus dem „Studienkreis Nachhilfe“ möchte ich mich bedanken, denn ohne sie wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Mein herzlichster Dank gilt Änne-Marthe Kühn für die Hilfe in den letzten Wochen und für das Beantworten von Fragen zur Kommasetzung, selbst während der Wehen.

Ich danke meiner Familie, die mich immer unterstützt hat und meinem zukünftigen Mann dafür, dass er mein Held ist, auf den ich mich immer verlassen kann.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In dieser Arbeit soll eine Lerneinheit zur Förderung kinematisch-funktionalen Denkens vorgestellt werden. Ziel ist es eine Möglichkeit aufzuzeigen, wie ein experimenteller auf qualitativen Betrachtungsweisen beruhender Zugang zu der Auseinandersetzung mit funktionalen Zusammenhängen geschaffen werden kann.

In **Kapitel 2** soll zunächst die Entwicklung des Begriffs „funktionales Denken“ dargestellt werden. Da die verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen und die Betrachtungsweisen im Umgang mit ihnen in der Arbeit von zentraler Bedeutung sind, soll auf diese gesondert eingegangen werden. Im Anschluss wird die Auseinandersetzung mit Funktionen im heutigen Mathematikunterricht kritisch beleuchtet. Abschließend soll eine Einordnung des Begriffs „kinematisch-funktionales Denken“ für diese Arbeit erfolgen.

Das **Kapitel 3** beschreibt die Entwicklung der Lerneinheit. Ausgehend von den ersten Ideen werden die thematische Schwerpunktsetzung und die Ansatzpunkte für die Gestaltung der Lerneinheit dargestellt. Anschließend wird auf die mathematikdidaktischen Themen eingegangen, die die Gestaltung der Lerneinheit oder einzelner Aufgaben beeinflussten. In diesem Zusammenhang wird auch ein Analysemodell zum Repräsentationstransfer vorgestellt, das zur Konzeption der Aufgaben diente. Die Lerneinheit selbst wird im letzten Abschnitt dieses Kapitels präsentiert. Dabei werden mit Hilfe des zuvor erläuterten Analysemodells die Schüleraktivitäten in den einzelnen Phasen der Lerneinheit beschrieben.

In **Kapitel 4** werden die Ergebnisse einer ersten Erprobung mit Schülern vorgestellt. Anhand von zwei Beobachtungsschwerpunkten soll das didaktische Potential der entwickelten Lerneinheit gezeigt werden. Auch die Verwendung einer zusätzlichen Repräsentationsform funktionaler Zusammenhänge als Bindeglied zwischen Beschreibung und Graph wird in diesem Kapitel diskutiert.

Das **Kapitel 5** befasst sich mit einer möglichen Umsetzung der Lerneinheit im Mathematikunterricht. Außerdem werden einige Ideen zu weiterführenden Aufgaben in der Sekundarstufe I und II skizziert.

Abschließend werden in **Kapitel 6** die Ergebnisse aus der Erprobung der Lerneinheit zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche zukünftige Forschungsansätze und auf denkbare Weiterentwicklungen der Lerneinheit gegeben.

2. Funktionales Denken

Bei der Entwicklung der in dieser Arbeit vorgestellten Lerneinheit stand die Idee des „kinematisch-funktionalen Denkens“ im Mittelpunkt. In diesem Kapitel soll zunächst in einem kurzen Überblick die historische Entwicklung des Begriffs „funktionales Denken“ in der Mathematikdidaktik dargestellt werden. Dabei wird auf die Repräsentationsformen von funktionalen Zusammenhängen und die verschiedenen Betrachtungsweisen im Umgang mit Funktionen eingegangen.
Im Anschluss daran erfolgt in Abschnitt **2.2** eine Auseinandersetzung mit der Behandlung von Funktionen im heutigen Mathematikunterricht auf Grundlage des Rahmenlehrplans des Landes Berlin. Abschließend wird in **Kapitel 2.3** eine begriffliche Einordnung für diese Arbeit vorgenommen, in der der Begriff „kinematisch-funktionales Denken“ erläutert wird.

2.1 Historische Entwicklung des didaktischen Prinzips

Eine erste schriftliche Nennung des Prinzips „funktionales Denken“ findet sich im Meraner Lehrplan von 1905 (Krüger 2000a; Krüger 2000b). Erstellt wurde dieser durch eine Kommission, die 1902 von Mitgliedern der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte berufen wurde. Die Aufgabe dieser Kommission bestand in einer umfassenden Umstrukturierung des naturwissenschaftlichen Unterrichts. Neben den technischen und wirtschaftlichen Neuerungen und dem daraus resultierenden Fachkräftemangel machten auch die wissenschaftlichen Entwicklungen der Zeit um 1900 diese Umstrukturierung notwendig[1]. Denn diese Entwicklungen führten zu wachsenden Anforderungen an den naturwissenschaftlichen Unterricht:

> „[Die Anforderungen] resultiert[en] aus dem immer rascher werdenden Fortschreiten der Wissenschaft selbst. Jedes Jahr bringt neue Entdeckungen nach praktischer wie nach theoretischer Seite, welche zu ignorieren unmöglich ist. Ich nenne nur elektrische Kraftübertragung, Röntgenstrahlen, Radioaktivität.“ (Klein 1907: 202)

Drei Jahre nach ihrer Gründung stellte die Kommission als Ergebnis ihrer Arbeit in Meran einen Lehrplan für die Fächer Mathematik, Physik, Chemie und Biologie vor. „Der Meraner Lehrplan für Mathematik“ (Klein 1907: 208ff.) entstand in einer Unterkommission unter der Leitung von Felix Klein. In dessen Einleitung werden die wichtigsten Leitgedanken und Prinzipien erläutert, unter anderem auch die wichtigsten Aufgaben des Mathematikunterrichts:

> „Ferner wird es sich darum handeln, unter voller Anerkennung des formalen Bildungswertes der Mathematik doch auf alle einseitigen und praktisch bedeutungslosen Spezialkenntnisse zu verzichten, dagegen die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwicklung zu bringen. Von hier aus entspringen zwei Sonderaufgaben: die Stärkung des räumlichen Anschauungsver-

1 Eine ausführliche Darstellung der wirtschaftlichen, technischen, soziokulturellen und bildungspolitischen Rahmenbedingungen der Meraner Reform finden sich in der Dissertation „Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips.“ von Katja Krüger (Krüger 2000a: 11ff.).

> mögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens.“ (Klein 1907: 208)

Der Begriff „funktionales Denken“, welcher an dieser Stelle erstmalig offiziell verwendet wird, beschreibt das Denken in Variationen und funktionalen Abhängigkeiten (Krüger 2000b). In dem Curriculum wird deutlich, dass dieses Denken nicht auf den Umgang mit Funktionen beschränkt wurde, sondern alle Gebiete des Mathematikunterrichts betreffen sollte. So schloss die Idee „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ insbesondere die ebene Geometrie und die Verwendung geometrischer Überlegungen in der Arithmetik ein. Zum einen meinte der Begriff somit eine Denkgewohnheit zur Bildung von Begriffsnetzen, zum anderen auch eine Strategie zum Problemlösen (Krüger 2000a: 228).

Die Funktionenlehre sollte nach dem Meraner Lehrplan bereits in den unteren Jahrgangsstufen beginnen. Dies beinhaltete eine erste vorwiegend qualitative Behandlung funktionaler Zusammenhänge und deren graphische Darstellung (Klein 1907: 214). In den höheren Klassenstufen sollte darauf aufbauend die Beschäftigung mit speziellen Funktionenklassen zunehmend quantitativer folgen (Klein 1907: 215ff.). Am Ende der mathematischen Ausbildung am Gymnasium sollte die Differential- und Integralrechnung als Höhepunkt stehen (Krüger 2000a).

Bereits seit den zwanziger Jahren des 19. Jahrhunderts wurde das Prinzip „funktionales Denken“ enger an den Funktionsbegriff gebunden und somit uminterpretiert. Denn während in den Meraner Vorschlägen die Begrifflichkeit des „funktionalen Denkens“ noch umfassender gemeint war, wurde sie zunehmend durch den Funktionsbegriff ersetzt.

Diese Tendenz mündete in den sechziger Jahren in der „Neuen Mathematik“, welche durch die rein axiomatisch-systematische Betrachtungsweise und die Betonung der punktweise eindeutigen Zuordnung das Prinzip des Denkens in Variationen völlig verdrängte (Krüger 2000a). Erst mit der Kritik an der „Neuen Mathematik“ in den achtziger Jahren gewann dieses Prinzip wieder Beachtung. So findet sich in dem häufig zitierten Artikel „Funktionales Denken“ von Hans-Joachim Vollrath erstmalig eine Definition des Begriffs:

> „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist.“ (Vollrath 1989: 6)

Durch diese enge Verknüpfung mit dem Funktionsbegriff wurde das Prinzip „funktionales Denken“ im Vergleich zu den Meraner Vorschlägen weiterhin stark eingegrenzt. So beschreibt es nach Vollrath die Fähigkeiten im Umgang mit Funktionen und wie diese für das Lösen von Aufgaben genutzt werden können. Zu diesen Fähigkeiten zählten zum einen das Identifizieren funktionaler Abhängigkeit als punktweise Zuordnung und das Erkennen des Einflusses der Veränderung einzelner Größen. Zum anderen gehörten dazu auch das Nutzen unterschiedlicher Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge und deren Übersetzung ineinander (Vollrath 1989). Diese Auffassung von funktionalem Denken hat sich in der Schulmathematik und Mathematikdidaktik bis heute durchgesetzt.

2.1.1 Betrachtungsweisen im Umgang mit Funktionen

In den Meraner Vorschlägen standen bei der Behandlung von Funktionen jene Betrachtungsweisen im Vordergrund, die eine Untersuchung der funktionalen Zusammenhänge mit Blick auf Veränderung und Bewegung betonten (Krüger 2000b). Im Mittelpunkt bei der Auseinandersetzung mit Funktionen stand hier das lokale und globale Änderungsverhalten und somit sowohl eine abschnittsweise Betrachtung als auch die Sichtweise auf Funktionen als Ganzes.
Während in der Phase der „Neuen Mathematik“ die quantitative und rechnerische Behandlung von Funktionen im Fokus standen, erweiterte Hans-Joachim Vollrath den Umgang mit Funktionen um weitere Betrachtungsweisen. So definierte er drei Aspekte, die charakteristisch für das Arbeiten mit Funktionen und somit für das funktionale Denken sind (Vollrath 1989).

Der *Zuordnungsaspekt* betont die punktweise Betrachtung funktionaler Zusammenhänge und eine statische Beschreibung funktionaler Abhängigkeit. Er steht somit in enger Beziehung mit der Funktionsdefinition als eindeutige Zuordnung:

> „Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so daß die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen.“ (Vollrath 1989: 8)

Eine dynamischere Sichtweise auf Funktionen wird durch den *Änderungsaspekt* beschrieben. Er beinhaltet die Frage nach dem Einfluss der systematischen Änderung einzelner Größen. Insbesondere meint dieser Aspekt auch die abschnittsweise Betrachtung des Änderungsverhaltens von Funktionen:

> „Durch Funktionen erfaßt man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.“ (Vollrath 1989: 12)

Der *Objektaspekt* hebt die Sichtweise auf Funktionen als Ganzes hervor. Somit stehen nicht mehr einzelne Wertepaare oder Abschnitte im Mittelpunkt, stattdessen wird auf die Menge aller Wertepaare geblickt. Die Zuordnung selbst wird somit zum Objekt der Betrachtung (Vollrath 1989: 15), insbesondere bezüglich globaler Eigenschaften wie Monotonie und auch bezüglich der qualitativen Beschreibung des Änderungsverhaltens.

> „Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.“ (Vollrath 1989: 15)

Die Unterscheidung zwischen diesen drei Betrachtungsweisen wurde in der Mathematikdidaktik bis heute beibehalten.

2.1.2 Darstellungsformen von Funktionen

Funktionale Zusammenhänge können in unterschiedlichen Formen dargestellt werden. Zu diesen Darstellungsformen gehören unter anderem verbale Beschreibungen, symbolische Darstellungen wie Funktionsterme, ikonische Repräsentationsformen, zu denen Funktionsgraphen und Pfeildiagramme zählen, sowie Tabellen. Für die Arbeit mit Funktionen ist die Verwendung unterschiedlicher Darstellungsformen von großer Bedeutung. Dies spielte auch schon im Meraner Lehrplan eine Rolle. Die dort geforderte Einführung graphischer Darstellungen bereits in der Mittelstufe stellte eine tiefgreifende Veränderung der Funktionenlehre dar, die bis heute beibehalten wurde. Da bis in die Oberstufe hinein qualitative Betrachtungsweisen im Vordergrund standen, war diese Repräsentationsform neben der verbalen Beschreibung von größter Bedeutung (Krüger 2000a: 179ff.).
Das Arbeiten mit und das Interpretieren von unterschiedlichen Repräsentationsformen ist eine grundlegende Voraussetzung für ein umfassendes Verständnis funktionaler Abhängigkeiten. Funktionales Denken erfordert zudem die Fähigkeit, die unterschiedlichen Darstellungsformen ineinander übersetzen zu können (Höfer 2008). Erste intensive Auseinandersetzungen mit der Thematik Repräsentationstransfer finden sich bei Malcolm Swan et al. und Claude Janvier (Swan et al. 1985; Janvier 1978). In einer Vielzahl von Aufgaben zur Interpretation verschiedener Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge und zur Übersetzung zwischen ihnen zeigten sie, wie vielfältig die dazu notwendigen Fähigkeiten der Schüler sind.
Die Abbildung 1 zeigt die vier häufigsten Darstellungsformen und die Übersetzungsmöglichkeiten zwischen ihnen in einer Matrix von Janvier. Malcolm Swan entwickelte ein ähnliches Modell, in dem er zusätzlich zwischen modellbildenden (oberhalb der Diagonalfelder) und interpretierenden Fähigkeiten (unterhalb der Diagonalfelder) unterschied (vgl. Höfer 2008: 39).

TRANSLATION SKILLS

From \ To	Situations, Verbal Description	Tables	Graphs	Formulae
Situations, Verbal Description		Measuring	Sketching	Modelling
Tables	Reading		Plotting	Fitting
Graphs	Interpretation	Reading Off		Curve Fitting
Formulae	Parameter Recognition	Computing	Sketching	

Abbildung 1: Überblick über die Darstellungsformen und die nötigen Übersetzungsfertigkeiten beim Transfer zwischen ihnen (Janvier 1978: 3.2).

Vollrath stellt zudem fest, dass verschiedene Darstellungsformen die Funktionsaspekte unterschiedlich stark betonen. So heißt es beispielsweise:

> „Unter den verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen eröffnet sich der Blick für das Ganze besonders deutlich bei den graphischen Darstellungen. Hier fallen auch Eigenschaften von Funktionen ins Auge wie Wachsen, Fallen, Symmetrien usw.“ (Vollrath 1989: 16)

Die Darstellung in einer Tabelle hingegen eignet sich besonders für die Betrachtung unter dem Zuordnungsaspekt, beispielsweise zum Bestimmen konkreter Werte.
Für das Erkennen spezifischer Eigenschaften funktionaler Zusammenhänge spielt die Wahl der Darstellungsform eine entscheidende Rolle. So vergleicht Hans-Georg Weigand das Vermögen von Schülerinnen und Schülern[2], unterschiedliche Funktionseigenschaften in Graph und Tabelle zu erfassen und stellt unter anderem fest:

> „Der Graph erleichtert das Erkennen der Symmetrie, während die Tabellendarstellung bei der Periodizität und beim exponentiellen Verhalten signifikant bzw. sehr signifikant bessere Ergebnisse lieferte.“ (Weigand 1988a: 310f.)

Darüber hinaus bemängelt er jedoch, dass die Fähigkeit im Argumentieren über Eigenschaften von Funktionen bei den Schülern nur sehr schwach ausgebildet ist. Dies betrifft unter anderem auch das Interpretieren der Funktionsgraphen (Weigand 1988a: 318).
Die oben genannten Arbeiten zeigen, welche Relevanz die Nutzung vielfältiger Repräsentationsformen für die Entwicklung funktionalen Denkens auch im heutigen Mathematikunterricht haben sollte.

2.2 Funktionen im heutigen Mathematikunterricht

Die Behandlung funktionaler Abhängigkeiten ist in den Rahmenlehrplänen für Mathematik der Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II unter der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ aufgeführt (SenBJS 2006a; SenBJS 2006b). In der Erläuterung zu dieser Leitidee heißt es:

> „Funktionen sind ein zentrales Mittel zur mathematischen Beschreibung quantitativer Zusammenhänge. Mit ihnen lassen sich Phänomene der Abhängigkeit und der Veränderung - insbesondere des Wachstums - erfassen und analysieren.“ (SenBJS 2006a: 12)

Welche Fähigkeiten die Lernenden laut dieser Leitidee erwerben sollen, ist in den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“ (KMK 2003) beschrieben. Dazu gehört unter anderem:

> „Die Schülerinnen und Schüler nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge [...]“ (KMK 2003: 11)

2 Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung männlicher und weiblicher Sprachformen in dieser Arbeit verzichtet. In der Regel wird auch im Singular nicht zwischen Schülerin und Schüler unterschieden, sondern die männliche Schreibweise verwendet, die hier ausdrücklich beide Geschlechter einschließt.

Die Bezeichnung von Funktionen als Mittel zeigt deutlich, dass im heutigen Mathematikunterricht nicht der funktionale Zusammenhang selbst im Vordergrund steht sondern die kalkülorientierte Arbeit mit ihm. Die Lernenden erwerben vielfältige technische Fertigkeiten, die jedoch nicht mit einem inhaltlichen Verständnis verbunden sind (Hahn/Prediger 2008). Betrachtet werden dabei stets „quantitative Zusammenhänge“ bestimmter Funktionenklassen. Diese Beschränkung auf bestimmte Funktionenklassen kann dazu führen, dass die Schüler eine sehr eingeschränkte Vorstellung von Funktionen und somit auch Fehlvorstellungen hinsichtlich des Funktionsbegriffes entwickeln (Hoffkamp 2011).
Weiter heißt es in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz zu der Nutzung unterschiedlicher Darstellungsformen:

> „[Die Schüler] erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen diese in sprachlicher, tabellarischer oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar“ (KMK 2003: 11)

Dem wird auch in den Rahmenlehrplänen der Sekundarstufe I und II in Form der prozessbezogenen Kompetenz „Darstellungen verwenden“ ein besonderer Stellenwert zugeordnet (SenBJS 2006a: 21; SenBJS 2006b: 12).
Die Umsetzung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I ist jedoch meist auf das Erstellen von Tabellen aus den Funktionstermen und das Skizzieren des Graphen anhand dieser Tabellenwerte beschränkt. Im Analysisunterricht der Sekundarstufe II beschränkt sich die Nutzung verschiedener Darstellungsformen von Funktionen auf eine kalkülhafte Verwendung in der sogenannten „Kurvendiskussion“[3]. Diese hauptsächlich numerische Behandlung von Funktionen stellt eine „Überbetonung des Zuordnungsaspektes“ (Hoffkamp 2011: 29) dar. Qualitative Betrachtungsweisen im Sinne des Änderungs- und Objektaspektes sind dagegen im Mathematikunterricht beider Sekundarstufen kaum vertreten. Dadurch wird auch die Schulung vieler interpretierender und modellbildender Fähigkeiten im Umgang mit Darstellungsformen vernachlässigt.
Des Weiteren besagen die Bildungsstandards:

> „[Die Lernenden] lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen.“ (KMK 2003: 12)

Die Bezeichnung „realitätsnahe Probleme“ erweckt den Eindruck, dass mit „echten“ Beispielen gearbeitet werden soll. Jedoch sind kaum realitätsnahe Anwendungsbeispiele im Mathematikunterricht zu finden. So haben die meisten Anwendungsaufgaben, wie sie in den Schulbüchern stehen, keinen tatsächlichen Realitätsbezug. Lutz Führer bezeichnet diese Aufgaben deshalb als „Anwendungsverkleidung“ (Führer 2009: 12). Insbesondere fachübergreifende Beispiele für funktionale Zusammenhänge mit echten Daten werden sehr selten behandelt.

Insgesamt lässt sich also feststellen, dass funktionales Denken im heutigen Mathematikunterricht wenig gefördert wird. Dies zeigt sich in der Dominanz von Betrachtungsweisen, die den Zuordnungsaspekt betonen, einem Mangel an realitätsnahen Anwendungsbeispielen und Aufgaben sowie einer Vernachlässi-

3 Aus den Funktionstermen werden durch die sture Anwendung von Rechenvorschriften einzelne Funktionswerte gewonnen, welche zum Skizzieren des Kurvenverlaufs in einer graphischen Darstellung genutzt werden. (siehe dazu „Kompetenzerwerb im Themenfeld Analysis“, SenBJS 2006b: 30ff)

gung der Schulung vielfältiger Fähigkeiten im Repräsentationstransfer.
Bedingt durch die Möglichkeiten neuer Medien machen sich in der Mathematikdidaktik der letzten Jahre allerdings Entwicklungen bemerkbar, die der dynamischeren Sichtweise wieder mehr Beachtung zukommen lassen[4]. An dieser Stelle sollen nur zwei Beispiele genannt sein.
Andrea Hoffkamp zeigt in ihrer Dissertation, wie mit Hilfe von Visualisierungen durch dynamische Geometriesoftware der Darstellungstransfer „Situation – Funktionsgraph“ für die Schüler interaktiv erfahrbar und durchführbar wird. Die drei von ihr entwickelten Lernumgebungen ermöglichen einen qualitativen und propädeutischen Zugang zu Konzepten der Differential- und Integralrechnung (Hoffkamp 2011).
Wolfgang Riemer zeigt in zahlreichen Beispielen, wie GPS-Daten genutzt werden können um Grundvorstellungen der Analysis erfahrbar zu machen. Die von ihm entwickelten Aufgaben befassen sich vorrangig mit der quantitativen Auswertung von Daten. Durch die Arbeit mit selbst aufgezeichneten Bewegungsdaten kann den Schülern der „Akt der Modellbildung“ (Riemer 2010: 54) bewusst gemacht werden, indem sie die Entwicklung von den Rohdaten hin zum mathematischen Modell selbst durchführen (Riemer 2011).

2.3 Kinematisch-funktionales Denken – begriffliche Einordnung dieser Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff „kinematisch-funktionales Denken“ im doppelten Sinne interpretiert. Zum einen wird er in Anlehnung an Katja Krüger verstanden. Sie benutzt diesen Begriff, um näher zu charakterisieren, was die Meraner Reformer unter funktionalem Denken verstanden, nämlich das Denken in Variationen in Hinblick auf Veränderung und Bewegung (Krüger 2000b). Zum anderen weist er darauf hin, dass in der hier entwickelten Lerneinheit der funktionale Zusammenhang der Größen Zeit, Strecke und Geschwindigkeit durch die Auseinandersetzung mit Bewegungsvorgängen im Mittelpunkt steht. Diese Behandlung von kinematischen Vorgängen hatte bereits in den Meraner Ideen einen besonderen Stellenwert bei der Entwicklung funktionalen Denkens:

> „Ausgehend von ersten Bewegungserfahrungen des Kindes wurden [...] bereits frühzeitig die Begriffe der Veränderlichen und der funktionalen Abhängigkeit vorbereitet. Das Beweglichmachen geometrischer Objekte, die Vorstellung fließender Figuren sowie die in der Physik behandelten Zeitfunktionen akzentuierten den kinematischen Aspekt funktionalen Denkens.“ (Krüger 2000a: 228)

In diesem Sinne soll die in dieser Arbeit vorgestellte Lerneinheit kinematisch-funktionales Denken insbesondere durch die Erfahrung von Bewegungssituationen fördern. Ziel ist eine tiefgehende Ausinandersetzung mit zeitabhängigen Größen und Vorgängen. Dabei beinhaltet kinematisch-funktionales Denken die Fähigkeit die funktionalen Zusammenhänge solcher Vorgänge in unterschiedlichen Darstellungsformen zu erkennen und zu beschreiben. Die Schüler sollen zur qualitativen Analyse der funktio-

4 Katja Krüger stellt fest, dass einige Ideen in neueren Arbeiten starke Parallelen zu den Forderungen der Meraner Reformer aufweisen (Krüger 2000a: 279). Es stellt sich die Frage, ob dies als Reorientierung hin zum Meraner Begriff des funktionalen Denkens aufgefasst werden kann.

nalen Zusammenhänge die unterschiedlichen Repräsentationsformen interpretieren und ineinander übersetzen, wobei der Rückbezug zur realen Situation stets im Vordergrund steht. Dadurch ist es möglich ein fundiertes Verständnis funktionaler Abhängigkeit zu schulen. So können die Lernenden in graphischen Darstellungen die Bedeutung von Extrem- und Wendepunkten sowie die Rolle des Anstiegs erkunden und kontextbezogen deuten. Die Förderung kinematisch-funktionalen Denkens bietet somit auch einen propädeutischen Zugang zu Konzepten der Analysis.

3. Die Lerneinheit

In diesem Kapitel soll die Entstehung der Lerneinheit dargestellt werden. Dazu wird zunächst in Abschnitt **3.1** auf die Motivation zur Entwicklung einer Lerneinheit und die ersten Ideen zu einer möglichen Realisierung eingegangen. Anschließend wird in **3.2** die Konkretisierung der Ideen zur Umsetzung in der Lerneinheit sowie die thematische Schwerpunktsetzung dargestellt. In **Kapitel 3.3** folgt dann eine Vorstellung der technischen Möglichkeiten und Schwierigkeiten, die sich bei der Verwendung der Smartphone-App „My Tracks“ ergeben. Die Erklärung des GPS-Ortungsverfahrens ist ausdrücklich nicht Bestandteil dieser Arbeit, da die Aufzeichnung von GPS-Daten in der Lerneinheit lediglich als „Werkzeug“ dient und nicht direkt thematisiert wird.
In Abschnitt **3.4** findet eine Auseinandersetzung mit den didaktischen Schwerpunkten, die auf die Entstehung der Lerneinheit Einfluss hatten statt. Auf eine Darstellung der Diskussion über die Vor- und Nachteile der Verwendung von neuen Medien wie dem Smartphone soll dabei verzichtet werden. Statt der Auseinandersetzung mit dem *Ob*, ist es Gegenstand dieser Arbeit zu zeigen, *wie* das Smartphone in einer Lerneinheit didaktisch sinnvoll eingebunden werden kann. In **Kapitel 3.5** wird schließlich die Lerneinheit selbst vorgestellt.

3.1 Motivation und erste Ideen zur Umsetzung

Die ersten Ideen zu der hier vorgestellten Lerneinheit entstanden in der Erarbeitung eines Vortrags zum Thema „Experimentieren im Mathematikunterricht“ im Hauptseminar „Die Leitideen Muster und Strukturen sowie Funktionaler Zusammenhang am Übergang von der Grundschule in die Sekundarstufe I“ bei Herrn Prof. Dr. Filler und Frau Prof. Dr. Grassmann. Dort wurde eine Möglichkeit für die Verwendung von GPS[5]-fähigen Smartphones zur Behandlung funktionaler Zusammenhänge im Mathematikunterricht vorgestellt.
Inspiration dafür war die Idee in Uli Brauners Artikel „Funktionsgraphen gehen. Ein Gefühl für Diagramme entwickeln.“ (Brauner 2008). Darin zeigt er, wie die direkte körperliche Erfahrung einer Bewegung gewinnbringend für die Einführung graphischer Darstellungen funktionaler Zusammenhänge genutzt werden kann. So wird in der dort beschriebenen Einstiegsaufgabe ein Schüler aufgefordert, anhand eines ausschließlich ihm vorgegebenen Diagramms Bewegungen vorzuführen, während die Mit-

5 Abkürzung für Global Positioning System, ein satellitengestütztes Ortungssystem.

schüler diese Bewegung in einer graphischen Darstellung skizzieren.
Brauner stellt fest, dass die Schüler die Diagramme intuitiv richtig umsetzen und auf Grundlage der selbst erlebten Situation und der Reflexion über ihre Bewegungen qualitativ über den funktionalen Zusammenhang der Größen Geschwindigkeit, Strecke (Abstand vom Stuhl) und Zeit argumentieren können.

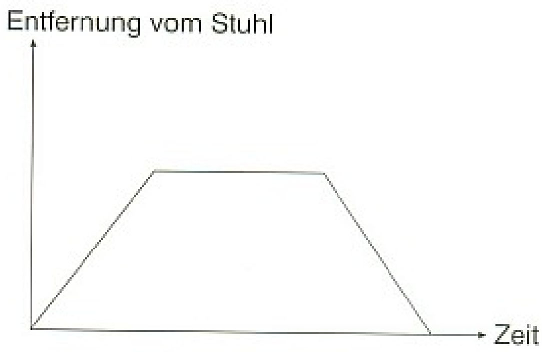


Abbildung 2: Graph in der Aufgabe „Graphen gehen" (Brauner 2008: 23).

Dies führte in der Vorbereitung zum Vortrag zu den folgenden Fragen:

- Kann man das „Graphen gehen" in einen größeren Maßstab, zum Beispiel auf den Schulweg der Schüler, übertragen?
- Gibt es eine Möglichkeit, statt mit idealisierten Graphen mit echten Bewegungsdaten zu arbeiten? Und können die Schüler diese Graphen dann auch noch lesen?

Das Erfassen von Bewegungsdaten zur späteren Verwendung im Unterricht beschreibt Wolfgang Riemer in dem Artikel „GPS – Dem Navi auf der Spur" (Riemer 2009). Er nutzt zur Aufzeichnung GPS- und Navigationsgeräte. Das Ziel, GPS-Daten zu erfassen ohne dafür auf teure Geräte zurückgreifen zu müssen, wurde mit der kostenlosen Smartphone-App „My Tracks"[6] umgesetzt. Mit Hilfe dieser App können GPS-Daten mit dem Smartphone erfasst werden. Zusätzlich werden während der Aufzeichnung der zurückgelegte Weg in einer Karte und die Bewegung in Form eines Geschwindigkeit-Zeit-Graphen dargestellt.

Eine erste Erprobung fand im Vorfeld des Vortrages mit einer Schülerin der achten Klassenstufe statt. Zuerst wurde eine kurze Strecke mit der App aufgezeichnet. Dann wurde der Schülerin unter anderem die Aufgabe gestellt, aus einem vorgegebenen Weg-Zeit-Graphen möglichst genau den Bewegungsablauf zu beschreiben. Ihr Ergebnis in Form einer kurzen Geschichte wird im Folgenden vorgestellt. Die Abbildung 3 zeigt den ihr vorgegebenen Graphen. Zur besseren Nachvollziehbarkeit wurden nachträglich die beschriebenen Abschnitte nummeriert.

6 App ist die gebräuchliche Kurzform für Applikation, einer Anwendungssoftware für Smartphones.

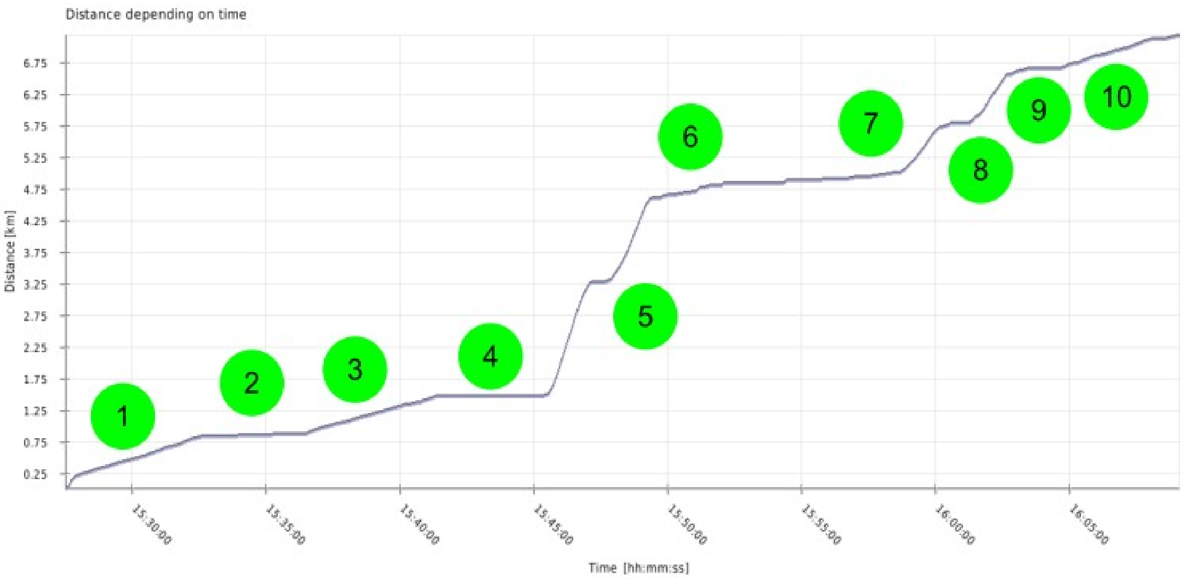


Abbildung 3: Aus GPS-Daten erstelltes Weg-Zeit-Diagramm mit nachträglich eingefügter Nummerierung der Abschnitte.

Frau Merck's (nicht sooo schöner) Nach-Hause-Weg

(1) Zuerst ist Frau Merck zügig aus der Schule gelaufen. Sie ist mit fast konstanter Geschwindigkeit von 10 km/h zur Eisdiele gelaufen, welche auf ihrem täglichen Nachhauseweg liegt.

(2) Sie wollte sich dort ein Eis kaufen, entschied sich aber nach ca. 5 Minuten Warten in der langen Schlange um und (3) lief wieder mit zügigem Tempo zur S-Bahnstation Baumschulenweg.

(4) Auf dem Gleis angekommen musste Frau Merck ungefähr bis 15:45 Uhr auf ihre S-Bahn warten.

(5) Die S-Bahn fuhr ca. 80 km/h und stoppte kurz beim nächsten Bahnhof. Dann fuhr Frau Merck in der S-Bahn zur nächsten Station und stieg aus.

(6) Weil sie sich beim Aussteigen gegen 15:50 Uhr den Fuß am Bahnsteig verknackste, obwohl der S-Bahnsprecher die Fahrgäste darauf aufmerksam mache,dass sie vorsichtig sein sollen, kam sie jetzt nur noch langsam und humpelnd voran.

(7) Nach ein paar Minuten stoppte Frau Merck kurz, da sie ihre Monatskarte fallen ließ.

(8), (9) Nachdem sie sie aufgehoben hatte setzte sie sich in den Bus und fuhr zwei Stationen.

(10) Danach humpelte sie zu den Fahrradständern und fuhr trotz des verknacksten Fußes 5 Minuten mit dem Rad und schloss es vor ihrer Wohnung an und humpelte in ihre Wohnung.

Diese sehr kreative Lösung zeigt, dass die Schülerin alle Abschnitte des Graphen sehr genau interpretiert hat. Die Durchschnittsgeschwindigkeiten einzelner Abschnitte hat sie durch die Berechnung des Sekantenanstiegs erhalten. Überraschender Weise erläuterte sie auf die Frage, wie sie auf die Idee zur Berechnung gekommen ist, nicht nur die Bedeutung des Sekanten- sondern auch die des Tangentenanstiegs:

Schülerin: „*Wenn ich das Lineal hier ran halte* (Schülerin legt Lineal nacheinander als Tangente an unterschiedliche Stellen der Kurve) *sehe ich, ob Sie da schnell oder langsam sind.“*

Ich: *„Woran siehst du das?“*

Schülerin: *„Na hier* (legt Lineal an Stelle) *ist es total steil und woanders flach.“*[7]

Es wurde deutlich, dass sich die Arbeit mit der App und den daraus gewonnenen Daten sehr gut eignet, um den funktionalen Zusammenhang der Größen Zeit, Strecke und Geschwindigkeit für Schüler erfahrbar zu machen und in vielfältigen Aufgaben umgesetzt werden kann.

3.2 Thematische Schwerpunktsetzung und Konkretisierung der Ideen zur Umsetzung

Erste Überlegungen hinsichtlich einer möglichen Lerneinheit beinhalteten die Idee einer analytischen Auswertung der aufgezeichneten Bewegungsdaten. Ansatz dafür waren die von Wolfgang Riemer entwickelten Aufgaben zur Überprüfung mathematischer Modelle mittels GPS-Daten sowie Aufgaben zur eigenständigen Modellentwicklung der Idealisierung des tatsächlichen Kurvenverlaufs (Riemer 2009; Riemer 2010). In vorbereitenden Gesprächen zu dieser Arbeit mit Herrn Prof. Dr. Filler und Frau Dr. Hoffkamp kristallisierte sich jedoch eine qualitativere Betrachtung der Daten als gewinnbringender für eine Lerneinheit mit dem Fokus auf der Förderung funktionalen Denkens heraus. Die unter diesem Fokus erstellten ersten Aufgaben beinhalteten vorrangig die Verwendung und Interpretation verschiedener Darstellungsformen sowie den Transfer zwischen ihnen. Als wichtigen Aspekt kinematisch-funktionalen Denkens beinhaltete der Repräsentationstransfer dabei stets den Rückbezug zur realen Situation.

Ansatzpunkt für die Gestaltung der Lerneinheit bildete die von Andrea Hoffkamp entwickelte interaktive Lernumgebung „Die Reise“ (Hoffkamp 2011), welche in Anlehnung an die Aufgabe „The Journey“ bei Malcolm Swan entstand (Swan et al. 1985). In dieser wird ebenfalls der funktionale Zusammenhang zwischen Strecke, Geschwindigkeit und Zeit vorrangig qualitativ thematisiert. Die Situation, eine Autofahrt zwischen zwei Städten, wird mittels dynamischer Geometriesoftware für die Schüler interaktiv erfahrbar gemacht und simultan mit dem dazugehörigen Weg-Zeit-Graphen verknüpft (Hoffkamp 2011).
Dies führte zu der folgenden Idee für die Lerneinheit: Die Schüler sollen eine solche „Reise“ selbst erleben und dabei mittels der App „My Tracks“ Bewegungsdaten aufzeichnen. Aufgrund der einfacheren Umsetzbarkeit und der Nähe zum Alltag der Lernenden findet die Reise nicht mit dem Auto sondern mit

7 Transskript aus einem, mit dem Smartphone aufgenommenen Videos der Erprobung.

unterschiedlichen öffentlichen Verkehrsmitteln statt. Damit erleben die Schüler auf dem Weg unterschiedliche Bewegungssituationen wie das Laufen, die Fahrt mit verschiedenen Verkehrsmitteln und das Warten auf diese und können in der späteren Auswertung der GPS-Daten auf diese Erfahrungen zurückgreifen

3.3 Technische Möglichkeiten und Grenzen der verwendeten App

Die Smartphone-App „My Tracks“ soll die Grundlage für alle Aufgaben in der Lerneinheit bilden und zugleich den Schülern einen experimentellen Zugang zu den funktionalen Zusammenhängen einer selbst erlebten Bewegung bieten. Die sehr intuitive Bedienung, die Präsentation der Daten in verschiedenen Formen und die variablen Einstellungen erlauben eine Verwendung der App mit Schülern ohne größere technische Einführung.
Die Abbildung 4 zeigt zwei Aufnahmen der Benutzeroberfläche von „My Tracks“. Die Aufzeichnung wird mit Taste 1 gestartet und gestoppt und mit Taste 2 endgültig beendet. Anschließend lassen sich die Daten in unterschiedlichen Dateiformaten (.gpx, .kml, .csv und .tcx) speichern.
Wie bereits erwähnt, werden während der Aufzeichnung mit dem Smartphone simultan zur Bewegung ein Geschwindigkeit-Zeit-Graph und die zurückgelegte Strecke in einer Karte gezeigt (Abbildung 4). Die Lernenden können somit ihre Bewegung während der Aufzeichnung im Graphen verfolgen.
Bei der Darstellung der Messwerte im Graphen nimmt das Programm jedoch eine Approximation vor. Daraus resultieren Ungenauigkeiten in der graphischen Darstellung und somit Schwierigkeiten für die spätere qualitative Auswertung. Dies wird in dem Graphen der Abbildung 4 deutlich. Obwohl bei der Aufzeichnung teilweise mehrere Minuten keine Bewegung stattfand, sank der Graph nicht auf den Wert Null ab. Eine mögliche Erklärung kann darin liegen, dass zur Glättung der Kurve über mehrere Werte gemittelt wurde[8]. Im Anhang 1 wurde versucht dies nachzuvollziehen, indem die Rohdaten eines Tracks[9] mit unterschiedlichen festen Fenstergrößen gleitend gemittelt wurden (Engel 2010: 314ff.). Im Vergleich der daraus entstandenen Graphen mit der Darstellung in der App wurde deutlich, wie stark die aufgenommenen Werte geglättet werden und dass daraus der oben beschriebene Fehler bei der Darstellung resultiert. Dieses Problem lässt sich jedoch während der Aufzeichnung einfach überwinden. Durch kurzes Unterbrechen des Aufzeichnungsprozesses (Betätigung der Pause-Start-Taste direkt nacheinander) wechselt der Graph sofort auf den Wert der Momentangeschwindigkeit, also bei Bewegungslosigkeit auf Null. Das Pausieren der Aufzeichnung unterbricht also anscheinend auch den Algorithmus zum Glätten der Kurve.

8 Hierbei handelt es sich um eine Vermutung, die sich aus der Verwendung der App ergab. Genaue Informationen über die Funktionsweise und Programmierung wurden mir von „google“ nicht zur Verfügung gestellt.

9 Als Track bezeichnet man einen per GPS aufgezeichneten Weg.

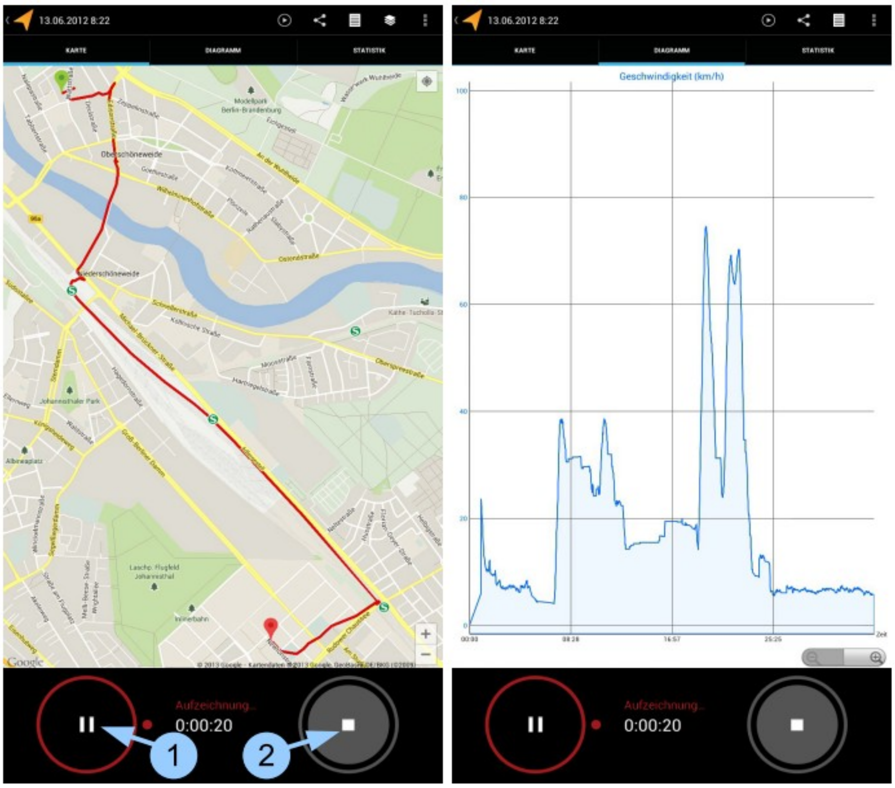


Abbildung 4: Aufnahme der Benutzeroberfläche der verwendeten App mit Markierungen. 1: Start- und Pause-Taste 2: Taste zum Beenden der Aufnahme.

Neben der Darstellung der Geschwindigkeiten über die Zeit bietet das Programm auch einen Höhen-Zeit-Graphen zur Darstellung der Bewegung an. Jedoch beträgt die GPS-Messgenauigkeit zur Bestimmung der Höhe im zivilen Bereich[10] mehrere hundert Meter (Dodel/Häupler 2010), wodurch diese Anzeige für die meisten Zwecke unbrauchbar wird. Daher empfiehlt es sich, diese Anzeige im Vorfeld zu deaktivieren. In den Einstellungen lässt sich auch der räumliche und zeitliche Abstand zwischen den Messpunkten festlegen. Während diese Einstellung zur Nutzung der App in unteren Jahrgangsstufen (7-9) vorgegeben werden sollte, bietet sie für höhere Jahrgänge (Klasse 9-13) einen Anlass für die Auseinandersetzung mit Modellen von Bewegungsdaten. Durch das Aufzeichnen einer Strecke mit unterschiedlich großen zeitlichen Abständen der Messpunkte können die Lernenden erfahren, dass das Messen diskreter Werte bereits eine Modellierung der Realsituation darstellt[11] (Riemer 209).
Des Weiteren bieten die Einstellungen der App die Möglichkeit, während der Aufzeichnung in einem festen zeitlichen Abstand Wegpunktmarkierungen zu setzen. Diese werden in der Karte angezeigt und ihre Werte in einer Liste dargestellt. Wie in Abbildung 5 erkennbar ist, ähnelt die Anzeige in der Karte einer Stroboskopaufnahme. Der Weg, die Zeit und die Geschwindigkeit der Bewegung sind durch diese

10 Es wird zwischen zivilen und militärischen Nutzern unterschieden. Die Ortsbestimmung mittels GPS im militärischen Bereich ist sehr viel genauer. (Dodel/Häupler 2010)

11 Bei der Aufzeichnung wird zwischen zwei Messpunkten eine konstante Geschwindigkeit vorausgesetzt. Mit zunehmenden zeitlichen Abstand der Punkte wird der Graph somit idealisiert.

Art der Darstellung für die Lernenden auf einen Blick erfassbar. Die Werte der Wegpunkte können beispielsweise genutzt werden, um daraus Weg-Zeit-Graphen zu erstellen.

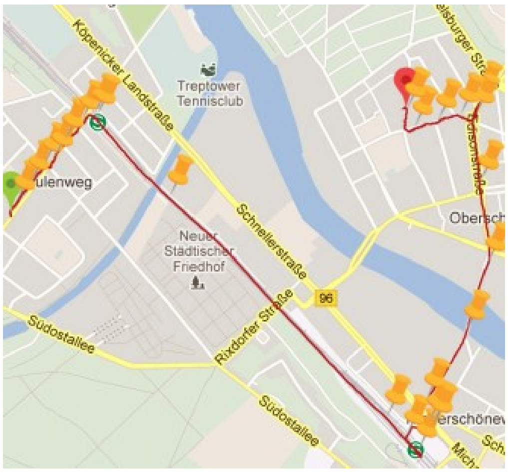


Abbildung 5: Aufnahme aus der Benutzeroberfläche der App: Karte mit Wegpunktmarkierungen.

Die aufgezeichneten Datensätze lassen sich nach dem Speichern auch in unterschiedliche Programme zur Visualisierung oder quantitativen Auswertung übertragen. So lassen sich Tracks, die im Format „.kml“ gesichert wurden, in „google-earth“[12] hochladen. Dies ermöglicht die Realsituation interaktiv erfahrbar zu machen, da der Weg animiert und gleichzeitig der Geschwindigkeit-Zeit-Graph dargestellt wird. Diese interaktive Visualisierung könnte, ähnlich wie in der Lernumgebung „Die Reise“ von Andrea Hoffkamp, im Unterricht zur Visualisierung und interaktiven Erfahrung eingesetzt werden. Da die Umsetzung, besonders für kürzere Strecken, in dem Programm nicht sehr gut gelungen ist, wurde diese Idee nicht in der Lerneinheit umgesetzt.

Der in Abbildung 3 (Seite 11) dargestellte Weg-Zeit-Graph wurde auf einer dafür konzipierten Internetseite erstellt (Pavel o.J.). Solche Seiten zur Auswertung von GPS-Daten finden sich im Internet zahlreich. Sie bieten die Möglichkeit, schnell und ohne technische Kenntnisse graphische Darstellungen, beispielsweise für die Präsentation im Unterricht, zu erstellen.

Die Übertragung der Aufzeichnung in Tabellenkalkulationsprogramme ermöglicht eine quantitative Auswertung der Datensätze sowie eine Manipulation dieser. Da sich das Übertragen der Daten etwas komplizierter gestaltet, findet sich in Anhang 2 eine kurze Dokumentation, welche Schritte dafür erforderlich sind.

Für eine Verwendung der App „My Tracks“ im Unterricht spricht, dass sie auf allen GPS-fähigen, mit Android betriebenen Smartphones[13] funktioniert und dass sie kostenlos verfügbar ist. Somit kann das Smartphone, das heutzutage fast jeder Schüler mit sich in der Tasche trägt, sinnvoll in den Unterricht eingebunden und nutzbar gemacht werden. Auch die Auswertung der Daten kann ohne weitere Programme (wie in der Lerneinheit umgesetzt), oder mit einfachen technischen Mitteln realisiert werden.

12 Computerprogramm von „google“, das unter anderem Satellitenaufnahmen der Erde bereitstellt und die virtuelle Besichtigung von Städten erlaubt.

13 Für das Betriebssystem IOS von Apple konnte leider keine vergleichbare App gefunden werden.

3.4 Mathematikdidaktische Arbeiten und deren Einfluss auf die Lerneinheit

In diesem Kapitel sollen die didaktischen Themen erläutert werden, die Einfluss auf die Gestaltung der Lerneinheit hatten. Dabei werden in den einzelnen Abschnitten die jeweiligen Themen vorgestellt und anschließend auf die Konsequenzen für die Lerneinheit eingegangen. Dabei wird nicht der Anspruch auf eine vollständige Darstellung der Themengebiete erhoben. Vielmehr soll ein Überblick über diejenigen mathematikdidaktischen Arbeiten verschafft werden, die einen direkten Einfluss auf die Konzeption der Lerneinheit und die Aufgabenstellungen hatten.

3.4.1 Typische Schwierigkeiten im Umgang mit graphischen Darstellungen

Wie bereits in **Kapitel 2.1.2** erwähnt, gehören die Nutzung und Interpretation verschiedener Darstellungsformen sowie der Transfer zwischen ihnen zu den wichtigen Aspekten funktionalen Denkens.
Insbesondere der Umgang mit graphischen Darstellungen bereitet den Schülern jedoch häufig Schwierigkeiten. Erstmalig wurde diesen von Claude Janvier in „The Interpretation of Complex Cartesian Graphs - Studies and Teaching Experiments“ nachgegangen (Janvier 1978). In verschiedenen Aufgaben untersuchte er die Fähigkeit von Schülern, Graphen hinsichtlich einer Situation zu interpretieren oder selbst zu skizzieren. Ein Fehler, der dabei häufig auftrat, wird als *Graph-als-Bild-Fehler* bezeichnet (Vogel 2007). Dabei interpretieren die Schüler Funktionsgraphen als quasifotografische Abbildungen der Situation. Ein typisches Beispiel für diesen Fehler ist in Abbildung 6 gezeigt. Der Schüler schließt aus der Form des Graphen, dass es sich um einen Berg handeln muss. Dabei scheint er die Entfernung vom Ausgangspunkt als Höhe zu interpretieren. Damit ließe sich auch seine Aussage zu dem Zeitraum zwischen Stunde 2 bis 4 erklären. Der Schüler erkennt hier nicht, dass in dieser Zeit keine Strecke zurückgelegt wird, sondern interpretiert es als Laufen auf konstanter Höhe. Er erkennt zwar richtigerweise den Anstieg des Funktionsgraphen als Maß für die Geschwindigkeit, interpretiert ihn aber gleichzeitig als Steigung des Berges. Zudem spricht er von zwei Seiten des Berges, was darauf schließen lässt, dass er die Abszissenachse nicht als Zeitachse identifiziert hat. Dies ist wiederum ein Indiz dafür, dass er den Funktionsgraphen als tatsächliches Abbild der Situation wahrgenommen hat.
Ein weiterer Fehler, der häufig auftritt, ist die Verwechslung von Bestand und Änderung. Dieser wird auch als *slope-height-confusion* bezeichnet (Hadjidemetriou/Williams 2002). Die Abbildung 7 zeigt einen Graphen, bei dessen Interpretation Schülern vorrangig dieser Fehler unterläuft. So stellten Hadjidemetriou und Williams bei ihren Untersuchungen zu Schülerkonzepten graphischer Darstellungen Lernenden zu diesem Graphen die Frage: „Wer nimmt im Alter von 14 Jahren mehr zu?“. Meist identifizierten die Schüler den höheren Ordinatenwert bei den Mädchen fälschlicherweise als Zeichen für schnelleres Wachstum. Die Steigung der Funktion wurde dagegen nicht als Maß der Änderung erkannt (Hadjidemetriou/Williams 2002).

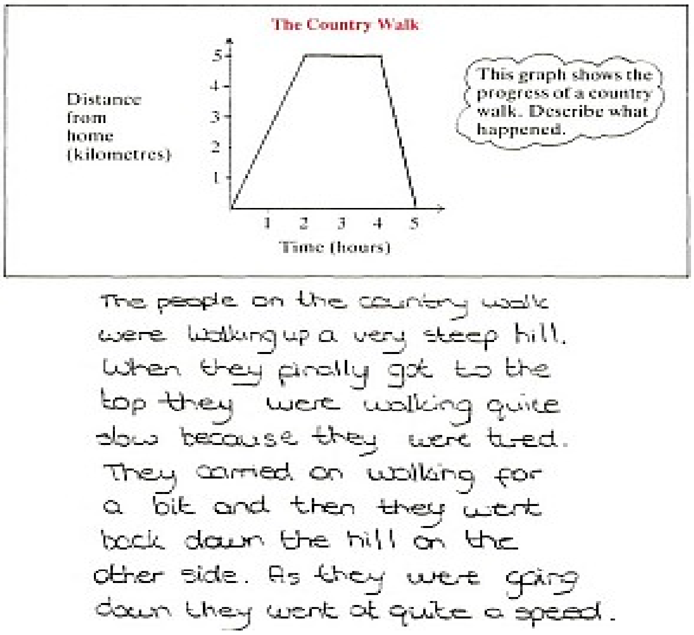


Abbildung 6: Typisches Beispiel für einen Graph-als-Bild-Fehler (Swan et al. 1985: 211).

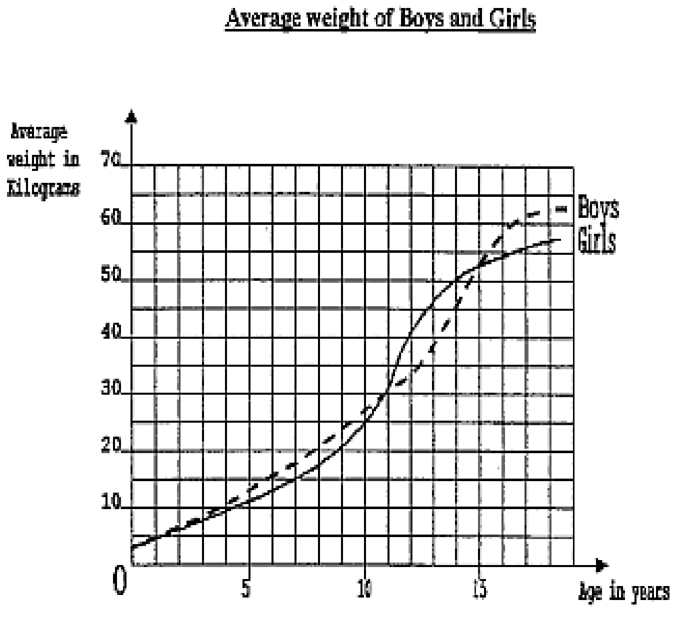


Abbildung 7: Darstellung deren Schülerinterpretation häufig eine Verwechslung von Bestand und Änderung enthält (Hadjidemetriou/Williams 2002: 79)

Eine mögliche Ursache für diese Fehlinterpretationen könnte im mentalen Konzept der Schüler zu Funktionen allgemein liegen. Anhand von Briefen, in denen Schüler den Begriff Funktion erläutern sollten, belegt Andrea Hoffkamp, dass dieses Konzept durch den Umgang mit nur wenigen Funktionsklassen geprägt ist (Hoffkamp 2011). Durch die Beschränkung auf einzelne Klassen von Funktionen im Mathematikunterricht wird den Schülern ein eingeschränktes Bild von Funktionen vermittelt. Diese fragmenthafte Vorstellung kann dazu führen, dass Funktionsgraphen wie sie in Abbildung 6 und 7 vorliegen nicht als solche wahrgenommen werden. Stattdessen werden sie von den Lernenden als ikonisches Abbild der zugrundeliegenden Situation aufgefasst. Wie Markus Vogel beschreibt, sind jedoch für das Lesen eines Funktionsgraphen weitaus mehr mentale Transformationen nötig, als für das Interpretieren einer bildlichen Darstellung (Vogel 2007). Werden Funktionsgraphen also fälschlicherweise als reales Abbild wahrgenommen, führt dies zu einer oberflächlicheren Betrachtung. Der funktionale Zusammenhang als solches wird dabei meist nicht wahrgenommen[14].
Neben den hier genannten werden in der fachdidaktischen Literatur noch zahlreiche weitere Schwierigkeiten im Umgang mit graphischen Darstellungen beschrieben (Hadjidemetriou/Williams 2002; Janvier 1978). Auf diese soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden, da sie nicht im direkten Zusammenhang mit der entwickelten Lerneinheit stehen.

Die Auseinandersetzung mit den oben erläuterten Schwierigkeiten führte zu folgenden Überlegungen hinsichtlich der Konzeption der Lerneinheit:

- Auf die Verwendung des Funktionsbegriffs wird in der Lerneinheit gänzlich verzichtet, da einerseits funktionales Denken keine Kenntnis zum Begriff Funktion erfordert. Andererseits soll dadurch vermieden werden, dass die Schüler auf eingeschränkte oder fehlerhafte Präkonzepte zu Funktionen zurückgreifen. Damit ist die Hoffnung verbunden, dass die Lernenden unvoreingenommen der erlebten Situation und den zugehörigen Graphen begegnen.
- Aus dem gleichen Grund ist die Lerneinheit für Schüler zu Beginn der achten Klassenstufe konzipiert. Zu diesem Zeitpunkt haben die Lernenden lediglich lineare Funktionen in der Schule kennengelernt und hatten auch im Physikunterricht noch keinen Kontakt zu Geschwindigkeit-Zeit- und Weg-Zeit-Graphen. Kenntnisse im Umgang mit linearen Funktionen sind insofern erforderlich, dass aus der Berechnung des Anstiegs von Sekanten die Durchschnittsgeschwindigkeiten in Weg-Zeit-Graphen bestimmt werden können.
- Der Einstieg in die Lerneinheit erfolgt über die Interpretation eines Geschwindigkeit-Zeit-Graphen mit Hilfe einer Karte, in die lediglich Start- und Zielpunkt der Fahrt eingezeichnet sind. Damit steht ein konkreter Zusammenhang mit der realen Situation von Beginn an im Vordergrund. Die Wahl des Graphen ist darin begründet, dass zum einen Geschwindigkeit-Zeit-Graphen für die Schüler zugänglicher sind als die dazugehörigen Weg-Zeit-Graphen. Zum anderen ist die Entstehung eines solchen Graphen im Anschluss während der Bewegung direkt beobachtbar. Der Weg-Zeit-Graph, bei dessen Interpretation laut Fachliteratur Missverständnisse

14 Andrea Hoffkamp unterscheidet in diesem Zusammenhang zwischen ikonischer und symbolischer Interpretation graphischer Darstellungen (Hoffkamp 2011, S.13).

auftreten können, wird den Lernenden nicht einfach vorgegeben, sondern soll aus den Daten der Bewegung von den Schülern selbst erzeugt werden. Anschließend soll der erstellte Weg-Zeit- mit dem Geschwindigkeit-Zeit-Graphen sowie der Beschreibung der Bewegung verglichen werden. Damit sollen die Lernenden einerseits den funktionalen Zusammenhang der Größen selbst erarbeiten. Andererseits soll ihnen dadurch bewusst gemacht werden, dass es sich bei den Graphen nicht um Abbildungen der Situation sondern um abstrakte Beschreibungen der Bewegungsformen handelt.

- Die Unterscheidung zwischen Bestand und Änderung in den Graphen soll durch eine zusätzliche Darstellungsform unterstützt werden. Durch Wegpunktmarkierungen in festen Zeitabständen auf der Karte sollen die Schüler zu Aussagen kommen wie: „Je größer die Strecke zwischen zwei Markierungen ist, desto größer ist die (Durchschnitts-) Geschwindigkeit in dem Zeitraum.“. Durch den Vergleich mit dem dazugehörigen Weg-Zeit-Graphen sollen sie zu der Erkenntnis gelangen, dass sich dies im Anstieg des Graphen in dem jeweiligen Zeitraum widerspiegelt. Außerdem bieten sich Fragestellungen an wie: „In welchem Zeitraum hat sich die Geschwindigkeit am stärksten geändert und woran hast du das gemerkt?“. Die Schüler können hier auf die direkte körperliche Erfahrung, beispielsweise während der S-Bahn-Fahrt, zurückgreifen. Die selbsterlebte Beschleunigung kann anschließend in dem Geschwindigkeit-Zeit-Graphen als Anstieg identifiziert werden. Das Erkennen und Beschreiben der Bedeutung des Anstiegs beider Funktionsgraphen stellt einen qualitativen Zugang zur Bedeutung der Ableitung von Funktionsgraphen dar. Wie in **Kapitel 3.1** gezeigt, ist es möglich, dass die Schüler in der Lerneinheit von allein auf den Übergang zur Momentangeschwindigkeit als Tangentenanstieg stoßen. Dies kann in Gesprächen mit den Lernenden durch Fragen angestoßen werden, soll aber nicht in den Aufgaben direkt gefordert werden. Auf Aufgaben, welche explizit auf die Bedeutung der Fläche unter dem Geschwindigkeit-Zeit-Graphen eingehen, wird ebenfalls verzichtet.

3.4.2 Qualitativer und experimenteller Zugang zu funktionalen Zusammenhängen

Wie bereits in **Kapitel 2.1** erläutert, stand in den Meraner Vorschlägen die qualitative Behandlung funktionaler Zusammenhänge, insbesondere in der Unterstufe im Vordergrund. Die Differential- und Integralrechnung sollte am Ende der mathematischen Ausbildung in der Oberstufe den Höhepunkt bilden (Krüger 2000b). Im Meraner Lehrplan finden sich auch Bemerkungen zur Methodik des Mathematikunterrichts. Diese lassen darauf schließen, dass die „Erziehung zum funktionalen Denken“ auch eine propädeutische Vorbereitung dieser Differential- und Integralrechnung beinhalten sollte (Krüger 2000b). So heißt es in den einleitenden Bemerkungen zum Lehrplan für Mathematik:

> „Einmal gilt es [...], den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen, überall an den vorhandenen Vorstellungskreis anzuknüpfen, die neuen Kenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen [...]“ (Klein 1907: 208)

Diese Beschreibung entspricht dem, was heutzutage als „genetisches Prinzip“ bezeichnet wird. Es handelt sich um das Anknüpfen an das Vorverständnis zum Aufbau neuer Kenntnisse auch unter Berücksichtigung der individuellen Entwicklung der Schüler (Reiss/Hammer 2013). In Bezug auf die Behandlung von Funktionen bedeutet dieses Prinzip auch, qualitative Betrachtungen zu bevorzugen und Aufgaben zu nutzen, die an die Erfahrungswelt der Lernenden anknüpfen.
Dass diese Art der Auseinandersetzung mit Funktionen tiefgreifende mathematische Vorstellungen schult, zeigten bereits Malcolm Swan und Claude Janvier in ihren Untersuchungen (Swan et al. 1985; Janvier 1978). Sie stellten den Lernenden Aufgaben, die vorrangig die Interpretation von graphischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge bezüglich einer beschriebenen Situation verlangten. Dabei zeigte sich, dass die Schüler insbesondere bei der Diskussion über ihre Interpretation der Funktionsgraphen Erkenntnisse über die globalen und lokalen Eigenschaften von Funktionen erlangten. So erkannten sie markante Stellen wie Hoch- und Tiefpunkte und Eigenschaften wie die Monotonie in den Graphen und deuteten diese kontextbezogen. Des Weiteren zeigte sich, dass die Lernenden bei der Erstellung von qualitativen Graphen und deren Interpretation zu permanenten Wechseln zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen angeregt werden (Stellmacher 1986).
Mit der Veränderung des Analysisunterrichts bis heute geriet diese Art der Auseinandersetzung mit Funktionen immer mehr in den Hintergrund. Deshalb kritisieren Didaktiker seit Jahrzehnten die vorwiegend numerische, auf das Kalkül orientierte Behandlungsweise von Funktionen im Mathematikunterricht und fordern einen qualitativ-verständnisorientierten Zugang zu Konzepten der Analysis bereits in der Sekundarstufe I (Hahn/Prediger 2008).
In der Fachliteratur finden sich zahlreiche Vorschläge für die qualitative Behandlung von Funktionen, die einen propädeutischen Zugang zu den Konzepten der Analysis bieten.
So findet sich in dem Artikel „Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis“ von Steffen Hahn und Susanne Prediger ein sehr eindrucksvolles Beispiel dafür, wie fruchtbar eine solche qualitative Behandlung von Funktionen sein kann (Hahn/Prediger 2008: 183). Die Abbildung 8 zeigt die Lösung zweier Schüler zu einer Aufgabe, die darin bestand den Graphen des täglichen Umsatzes eines Produkts zu interpretieren und kontextbezogen in verschiedene Phasen zu unterteilen. Die Lernenden erkannten die Extrem- und Wendepunkte als markante Punkte in der graphischen Darstellung und deuteten diese intuitiv als Endpunkte der Phasen der Produktentwicklung. Mittels dieser Phasen trafen sie Aussagen über das Änderungsverhalten des Bestandes. Andere Schüler trafen auch Aussagen über die Qualität dieser Änderung aufgrund der Steigung des Graphen (Hahn/Prediger 2008: 183f.). Die Autoren schlussfolgern daraus, dass diese Art der Auseinandersetzung mit Funktionen nicht nur eine propädeutische Einführung zu den Konzepten der Differentialrechnung darstellt sondern auch Anknüpfungspunkt für die Entwicklung von mathematischen Begriffen wie Extrem- und Wendestellen sowie Bestand und Änderung bietet (Hahn/Prediger 2008).

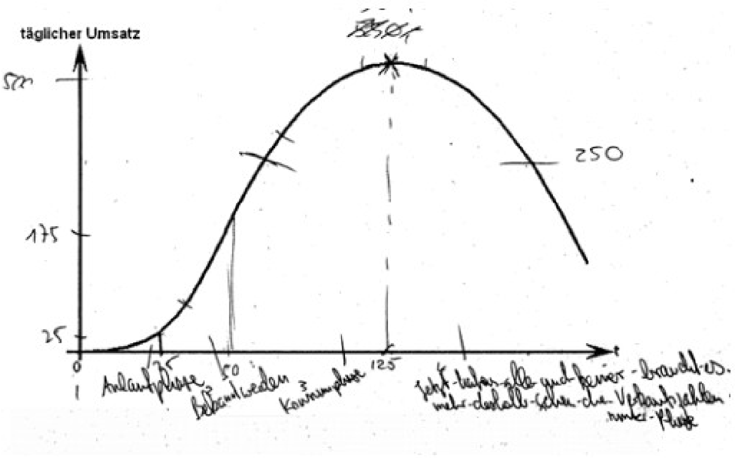
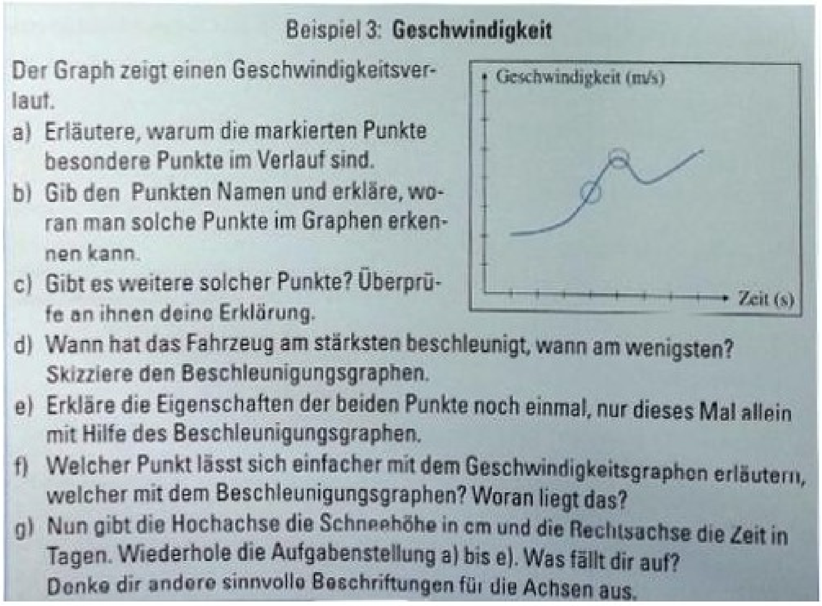


Abb. 7: Wendepunkt und Extrempunkt selbst erfunden – Einteilung des Produktlebenszyklus in charakteristische Phasen von Martina und Henner
(Transkription der handschriftlichen Legende: Anlaufphase – Bekanntwerden – Konsumphase – Jetzt-habens-alle-und-keiner-braucht-es-mehr-deshalb-gehen-die-Verkaufszahlen-runter-Phase)

Abbildung 8: Schülerlösung zu der Aufgabe einen Produktzyklus zu beschreiben (Hahn/Prediger 2008: 183).

Die nichtquantitative Auseinandersetzung mit Funktionen im Unterricht bietet die Möglichkeit, auch jene funktionalen Zusammenhänge zu behandeln, die algebraisch nicht erfassbar sind. Dies erlaubt mit alltagsnahen Beispielen zu arbeiten. Die Aufgabe von Stephan Hußmann in Abbildung 9 zeigt, dass sich kinematische Vorgänge in besonderem Maße eignen, funktionale Abhängigkeit an alltagsnahen Beispielen qualitativ zu betrachten (Hußmann 2010). Auch hier sollen die Lernenden markante Punkte in der Darstellung erkennen und situationsgerecht deuten. Ein großer Vorteil kinematischer Vorgänge ist, dass den Schülern bereits bekannte Begriffe, wie „Beschleunigen" und „Bremsen" für die Beschreibung zur Verfügung stehen. Die wechselseitige Betrachtung von Bestand und Änderung nimmt hier in den Aufgaben d), e) und f) eine entscheidende Rolle ein. Durch das Skizzieren des Ableitungsgraphen wird diese Unterscheidung explizit betont und bietet Anlass immer wieder über die Bedeutung besonderer Punkte im Kurvenverlauf zu reflektieren. Die Schüler entwickeln so ein qualitatives Verständnis zur Bedeutung von Extrem- und Wendepunkten, die zu vorläufigen Definitionen der Begriffe führen können und sich später im Mathematikunterricht durch den Grenzwertbegriff erweitern lassen sollen (Hußmann 2010).

Qualitative Betrachtungsweisen können durch dynamische Visualisierungen gestützt werden. Die simultane Visualisierung von Situation und Funktionsgraph, wie in den Lernumgebungen von Andrea Hoffkamp (Hoffkamp 2011), und der Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion ermöglicht den Schülern funktionale Zusammenhänge selbst zu erkunden. Die bereits erwähnten Lernumgebungen von Hoffkamp wurden mit dynamischer Geometriesoftware realisiert. Dies erlaubt sowohl eine Variation einzelner Größen innerhalb der dargestellten Situation als auch die Variation der Situation selbst. Durch diese beiden Variationsstufen wird das Erkunden der funktionalen Abhängigkeiten der Größen und der Bedeutung markanter Punkte und Eigenschaften des Funktionsgraphen aktiviert und somit ein tiefes mathematisches Verständnis geschult (Hoffkamp 2011).



Beispiel 3: Geschwindigkeit

Der Graph zeigt einen Geschwindigkeitsverlauf.

a) Erläutere, warum die markierten Punkte besondere Punkte im Verlauf sind.

b) Gib den Punkten Namen und erkläre, woran man solche Punkte im Graphen erkennen kann.

c) Gibt es weitere solcher Punkte? Überprüfe an ihnen deine Erklärung.

d) Wann hat das Fahrzeug am stärksten beschleunigt, wann am wenigsten? Skizziere den Beschleunigungsgraphen.

e) Erkläre die Eigenschaften der beiden Punkte noch einmal, nur dieses Mal allein mit Hilfe des Beschleunigungsgraphen.

f) Welcher Punkt lässt sich einfacher mit dem Geschwindigkeitsgraphen erläutern, welcher mit dem Beschleunigungsgraphen? Woran liegt das?

g) Nun gibt die Hochachse die Schneehöhe in cm und die Rechtsachse die Zeit in Tagen. Wiederhole die Aufgabenstellung a) bis e). Was fällt dir auf? Denke dir andere sinnvolle Beschriftungen für die Achsen aus.

Abbildung 9: Aufgabe zur qualitativen Betrachtung funktionaler Zusammenhänge von kinematischen Vorgängen (Hußmann 2010: 8).

Neben den qualitativen erfüllen auch quantitative Betrachtungsweisen wichtige Aufgaben zur Entwicklung des mathematischen Verständnisses von funktionaler Abhängigkeit. Insbesondere für den Wechsel zwischen den Repräsentationsformen spielt die quantitative Auseinandersetzung eine entscheidende Rolle, da dadurch den Schülern bewusst wird, wie die Darstellungen auseinander hervorgehen. So wird beispielsweise durch die Arbeit mit konkreten Daten in Tabellen einerseits der Zuordnungsaspekt der Funktion betont. Andererseits können aus diesen Daten graphische Darstellungen erstellt werden, die wiederum mit den qualitativen Interpretationen und Darstellungen verglichen werden können.

Ziel sollte es also sein, bei der Behandlung funktionaler Zusammenhänge sowohl auf qualitative als auch auf quantitative Auseinandersetzungen Wert zu legen. Diese beiden Betrachtungsweisen sollten dabei stets ineinandergreifen und aufeinander aufbauen (Hußmann/Leuders 2010). In diesem Zusammenhang bieten unter anderem Experimente die Möglichkeit beiden Betrachtungsweisen Raum zu geben. Wie Bärbel Barzel und Sandra Ganter in dem Artikel „Experimentell zum Funktionsbegriff" beschreiben, bringt dieser Zugang viele positive Effekte mit sich (Barzel/Ganter 2010). Ein experimenteller Zugang verspricht eine hohe Selbsttätigkeit der Lernenden und eine aktive, eigenständige Aneignung neuer Kenntnisse. So machen die Schüler in den Experimenten Beobachtungen, die sie verbalisieren oder erheben Daten zur späteren Auswertung. Die verbale Beschreibung beobachteter funktionaler Zusammenhänge bildet die Grundlage für die spätere Interpretation graphischer Darstellungen. Das Entdecken von mathematischen Zusammenhängen durch eigene Messdaten weckt in den Lernenden Neugierde und Forschungseifer und sie haben das Gefühl etwas „selbst entdeckt" zu haben. In der Auswertung der Daten und deren Interpretation können die Schüler auf die eigenen Erfahrungen und Beobachtungen aus dem Experiment zurückgreifen. Dadurch werden eigenständige Gedanken zur Abhängigkeit zwischen den Größen aktiviert.

Die hier vorgestellte Lerneinheit soll durch eine verständnisorientierte qualitative Behandlung funktionaler Zuordnungen kinematisch-funktionales Denken fördern und somit einen Beitrag zur propädeutischen Einführung zu Konzepten der Analysis leisten. Darüber hinaus sollen die Schüler mittels selbst gewonnener GPS-Daten die funktionalen Zusammenhänge ihrer Bewegung erkunden. Die Auseinandersetzung mit den oben vorgestellten didaktischen Arbeiten führte zu einer Spezifizierung, die präzisierte, in welcher Form beide Zugänge genutzt werden sollen um bestimmte Aspekte kinematisch-funktionalen Denkens zu fördern.

- Die Lernenden sollen den funktionalen Zusammenhang zwischen den Größen Zeit, Strecke und Geschwindigkeit eigenständig entdecken. Grundlage dafür bilden die Erfahrung aus der selbst erlebten „Reise“ und die währenddessen aufgezeichneten GPS-Daten. In einer ersten qualitativen Analyse ihrer Bewegung sollen die Schüler ihre verbale Beschreibung der Bewegung mit dem aufgezeichneten Geschwindigkeit-Zeit-Graphen und den Wegpunktmarkierungen vergleichen. Ziel ist, dass die Lernenden erste funktionale Zusammenhänge formulieren, wie: „Während wir auf die Bahn warteten, haben wir keine Strecke zurückgelegt.“ oder „Je größer die Geschwindigkeit, desto größer war der zurückgelegte Weg in einer bestimmten Zeit.“. Diese Formulierungen sollen anschließend genutzt werden um den zu der Bewegung gehörigen Weg-Zeit-Graphen zu skizzieren. Im Anschluss daran soll eine quantitative Auswertung der GPS-Daten folgen. Die Schüler sollen die Daten der Wegpunktmarkierungen (Wegpunktnummer und Abstand zum letzten Wegpunkt) aus der App in eine Tabelle übertragen. In der tabellarischen Darstellung sollen für jeden Wegpunkt die bis dahin vergangene Zeit und die zurückgelegte Entfernung vom Startpunkt ermittelt und aus diesen Informationen der zugehörige Weg-Zeit-Graph gezeichnet werden. Durch den Vergleich des Weg-Zeit- mit dem Geschwindigkeit-Zeit-Graphen wird die funktionale Abhängigkeit wiederum qualitativ mit den Lernenden diskutiert.
- In den Funktionsgraphen sollen die Lernenden markante Punkte und Eigenschaften des Kurvenverlaufs erkennen und kontextbezogen deren Bedeutung beschreiben. Insbesondere soll dabei auf die Bedeutung des Anstiegs in den graphischen Darstellungen eingegangen werden. Auch hier sollen sowohl qualitative als auch quantitative Betrachtungsweisen, wie das Ablesen konkreter Werte in der graphischen Darstellung, genutzt werden. Eine entscheidende Rolle bei der qualitativen Deutung besonderer Punkte im Geschwindigkeit-Zeit-Graphen spielt die simultane Entstehung dieses Graphen während der „Reise“. Die Schüler können während der Bewegung die Auswirkung von Geschwindigkeitsänderungen in dem Graphen beobachten. Diese direkte Rückmeldung wirkt sich allgemein positiv auf das Verständnis von Bewegungsvorgängen und auf die Fähigkeit graphische Darstellungen zu interpretieren aus (Robutti 2006; Barzel/Ganter 2010). Durch die selbst gemachten körperlichen Erfahrungen in der Bewegung können die Schüler auch den Anstieg des Geschwindigkeit-Zeit-Graphen als Maß für die Geschwindigkeitsänderung (Beschleunigung) erkennen. Gleiches gilt für den Weg-Zeit-Graphen, dessen Anstieg qualitativ als Maß für die Geschwindigkeit gedeutet werden soll. Zusätzlich sollen die Lernenden in ihm quantitativ Durchschnittsgeschwindigkeiten mittels Berechnung des Sekantenanstiegs ermitteln.

- Im Gegensatz zu den oben gezeigten Beispielen soll die Auseinandersetzung mit den Eigenschaften der Funktionsgraphen nicht zu (vorläufigen) Begriffsdefinitionen markanter Punkte führen. Ziel ist ein reines Verständnis der funktionalen Zusammenhänge und das Erkennen und Deuten dieser in unterschiedlichen Repräsentationsformen.

3.4.3 Die Bedeutung der Größe Zeit

Die Auseinandersetzung mit kinematischen Vorgängen bedeutet stets eine Betrachtung von zeitabhängigen funktionalen Zusammenhängen. Die Größe Zeit nimmt dabei gegenüber anderen Größen eine Sonderstellung ein. Hans-Georg Weigand beschreibt in dem Artikel „Zur Bedeutung von Zeitfunktionen für den Mathematikunterricht“ zwei Besonderheiten, die aus dem „kontinuierlichem Dahinfließen der Zeit“ (Weigand 1988b: 59) folgen. Zum einen bedingt dieser dynamische Charakter der Größe auch eine dynamischere Sichtweise auf zeitabhängige Funktionen. Der durch sie beschriebene Vorgang wird als fortlaufender Prozess der ständigen Veränderung wahrgenommen. Dadurch wird in höherem Maße eine globale Betrachtung betont als es bei nicht-zeitabhängigen funktionalen Zusammenhängen häufig der Fall ist[15] (Weigand 1988b). Zum anderen erfordert die Auseinandersetzung mit der Veränderung zeitabhängiger Größen von den Schülern besondere kognitive Fähigkeiten. Dies betrifft bereits die Beobachtung zeitabhängiger Vorgänge:

> „Während vielen anderen Variablen (Länge, Winkel, Masse) bei funktionalen Zusammenhängen die kontinuierliche Veränderlichkeit 'aufgezwungen' werden muß, ist umgekehrt ein Anhalten der Zeit nicht möglich, und es bedarf etwa des Erinnerungsvermögens des Menschen oder des Hilfsmittels der Fotografie, um das stetige Fortschreiten für den Betrachter zu stoppen.“ (Weigand 1988b: 59)

Auch die qualitative und quantitative Behandlung von zeitabhängigen funktionalen Zusammenhängen im Mathematikunterricht erfordert von den Schülern eine Vielzahl von Fähigkeiten. Diese reichen von einfachen, bereits im Vorschulalter erworbenen geistigen Leistungen wie dem Erkennen von Gleichzeitigkeit und dem Vergleich von Zeitintervallen bishin zu komplexen Fähigkeiten wie dem gedanklichen Anhalten von Vorgängen und Umkehren der Zeitrichtung sowie dem Treffen von Prognosen über die Entwicklung der zeitabhängigen Größe in der Zukunft (Weigand 1988b).

Insbesondere die Interpretation von Funktionsgraphen kinematischer Vorgänge erfordert die oben genannten kognitiven Fähigkeiten und bereitet den Lernenden häufig Schwierigkeiten. So resultiert der in **Kapitel 3.4.1** beschriebene *Graph-als-Bild-Fehler* meist daraus, dass die zeitliche Abhängigkeit nicht erkannt oder nicht beachtet wird. Statt einer dynamischen wird dem Graphen eine statische Bedeutung, wie einer fotographischen Abbildung zugeordnet.

---

15 Dies entspricht dem, was in der Meraner Reform mit der „Erziehung zum funktionalen Denken“ gefordert wurde: Die globale Betrachtung von Funktionen unter dem Aspekt der Bewegung und Veränderung.

Die Beschäftigung mit der Sonderstellung der Größe Zeit und den daraus resultierenden Anforderungen an die Schüler, führte zu der Ausarbeitung bestimmter Aufgabenstellungen.

- In der Lerneinheit sollen die Lernenden einen kinematischen Vorgang in verschiedenen Darstellungsformen interpretieren und analysieren. Dabei ist stets auch eine Auseinandersetzung mit der Zeitabhängigkeit der Größen Geschwindigkeit und Strecke verbunden. So müssen die Schüler bereits zu Beginn der Lerneinheit einen gegebenen Geschwindigkeit-Zeit-Graphen interpretieren. Für die Aufgabe, sich anschließend zum Startpunkt des beschriebenen Weges zu bewegen, sind die Lernenden gezwungen die gleiche graphische Darstellung „rückwärts zu lesen" um den Weg von Ziel- zum Startpunkt zu beschreiben. Sie müssen also gedanklich die Richtung der Zeit umkehren um Informationen über die „Reise" zu erhalten.
- Durch den experimentellen Zugang sollen die Lernenden die Zeitabhängigkeit ihrer Bewegung bewusst wahrnehmen. Im Anschluss daran sollen sie die erlebte Situation in verschiedenen Repräsentationsformen (verbal, bildlich und in Graphen) rekonstruieren. Sie müssen also aus der Erinnerung Aussagen über die Bewegungssituationen treffen. Durch diese aktive Auseinandersetzung mit der Größe Zeit und dem Beschreiben zeitabhängiger Vorgänge sollen die Schüler die funktionalen Zusammenhänge selbst erarbeiten und die erlebte Situation als dynamischen Prozess wahrnehmen.

3.4.4 Repräsentationstransfer – das „Haus des funktionalen Denkens"

Das „Haus des funktionalen Denkens" ist ein Analysemodell, das von Thilo Höfer im Rahmen seiner gleichnamigen Dissertation entwickelt wurde. Es erlaubt eine Analyse von Aufgabenstellungen zu funktionalen Zusammenhängen hinsichtlich der vorausgesetzten Fertigkeiten zum Repräsentationstransfer.
Das Modell entstand aus der Zusammenführung der zweidimensionalen Matrix zum Repräsentationstransfer, wie sie in **Kapitel 2.1.2** zu finden ist, mit drei Ebenen in Anlehnung an die Aspekte funktionalen Denkens nach Vollrath (**Kapitel 2.1.2**). Das daraus resultierende dreidimensionale Modell ist in Abbildung 10 gezeigt. Es besteht aus einzelnen Quadern, die als „Bausteine funktionalen Denkens" (Höfer 2008: 53) beschrieben werden. Jeder dieser Bausteine entspricht einer Fertigkeit zum Lösen von Aufgaben, bei denen der jeweilige Darstellungswechsel erforderlich ist. Zusätzlich wurden auch den Diagonalfeldern Transferleistungen zugeordnet. Lediglich der Übersetzung innerhalb der Darstellungsform der verbalen und bildlichen Beschreibung wird keine Fertigkeit im Sinne funktionalen Denkens zugesprochen[16].
Das Modell ermöglicht eine Analyse von Darstellungswechseln sowohl bezüglich der Art der zu beherrschenden Übersetzungsfertigkeiten als auch der Ausprägung dieser Beherrschung in Bezug auf die drei Ebenen: Aktions-, Prozess- und Objektebene (Höfer 2008: 52). Dabei stellen diese Ebenen keine Wertung der Transferleistungen dar, sondern präzisieren die notwendigen Betrachtungsweisen auf die Funk-

16 An dieser Stelle sei jedoch angemerkt, dass das Übersetzen von verbalen Beschreibungen in bildliche Abbildungen wie Karten und umgekehrt, im höchsten Maße interpretierende Fähigkeiten von den Schülern verlangt.

tion bei der Übersetzung zwischen zwei Darstellungsformen.
Auf der *Aktionsebene* erfordern die Darstellungsübergänge eine Zuordnung oder ein Ablesen von konkreten Werten und somit eine punktweise Betrachtung des funktionalen Zusammenhangs in beiden Repräsentationsformen. Aufgaben, die einen Repräsentationstransfer auf der *Prozessebene* voraussetzen, verlangen hingegen eine dynamischere, abschnittsweise Betrachtung der Funktion. Muss zur Übersetzung zwischen zwei Darstellungen die Funktion als Ganzes betrachtet werden, handelt es sich um einen Transfer auf der *Objektebene*. Jeder Wechsel zwischen zwei Darstellungsformen kann jeweils auf den drei verschiedenen Ebenen stattfinden.

Dieses Modell wurde für die Konzeption der Aufgaben der Lerneinheit genutzt. Ziel war es Aufgaben zu entwickeln, die von den Lernenden Darstellungsübergänge auf allen drei Ebenen erfordern. Dabei stand die Förderung von interpretierenden Fähigkeiten im Vordergrund.
Des Weiteren diente das Modell der Konkretisierung der notwendigen Transferleistungen der Schüler und der damit verbundenen Aktivitäten.
Das „Haus des funktionalen Denkens" erlaubt auch eine Analyse von beobachteten Schüleraktivitäten, die Aufschluss darüber gibt, auf welcher Transferebene Schülerlösungen zu Stande kommen. Davon wurde in der Auswertung der Erprobung Gebrauch gemacht.
Das nachfolgende Kapitel soll die entstandene Lerneinheit vorstellen. Dabei wird auch auf die Transferleistungen und Schüleraktivitäten, die sich aus der Analyse der Aufgaben ergaben, eingegangen.

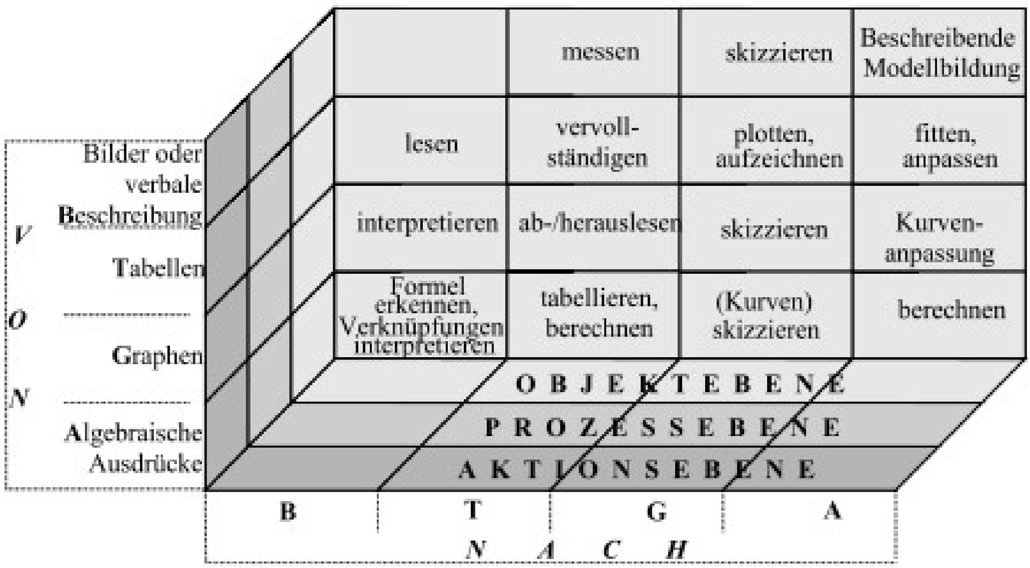


Abbildung 10: Das „Haus des funktionalen Denkens" zur Analyse von Darstellungsübergängen (Höfer 2008: 53).

3.5 Vorstellung der Lerneinheit

Im Folgenden wird die Lerneinheit, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde, vorgestellt. Dabei werden die einzelnen Aufgabenstellungen nach Höfers „Haus des funktionalen Denkens“ analysiert. Diese Analyse dient der detaillierten Beschreibung der vorausgesetzten Schüleraktivitäten bei der Lösung der Aufgaben. Die verwendeten Arbeitsblätter für die Schüler sind im Anhang 3 zu finden.
Die Lerneinheit ist so konzipiert, dass je zwei Schüler sie gemeinsam durchlaufen können. Dabei wechseln sich in der vierstündigen Bearbeitungszeit Phasen der Einzel- und Partnerarbeit ab. Die Lehrkraft ist dabei teilnehmender Beobachter, der Hilfestellungen gibt und Diskussionen anregen soll.
Die Lerneinheit ist in vier Teile gegliedert: Der Einstieg, die Durchführung der Messung, die Auswertung der gewonnenen Daten und die Anwendung gewonnener Erkenntnisse auf eine ähnliche Situation.

3.5.1 Die Einstiegsaufgabe

Zum Einstieg in die Lerneinheit erhalten die Schüler, den in Abbildung 11 gezeigten Geschwindigkeit-Zeit-Graphen und eine Karte, in der lediglich Start- und Zielpunkt einer „Reise“ eingezeichnet sind. Die Lernenden werden aufgefordert, aus dem Graphen möglichst viele Informationen über den Ablauf dieser Reise zu ermitteln. Die Schüler sollen den Graphen ohne weitere Vorbereitung interpretieren und den vermuteten Weg in die Karte einzeichnen. Damit steht von Beginn an der Bezug zur Situation und die Beschreibung von Bewegungen im Mittelpunkt. Erhofft wird eine intuitive Interpretation, in der die markanten Punkte und Eigenschaften des Kurvenverlaufs erkannt werden und kontextbezogen deren Bedeutung beschrieben wird. Dies erfordert sowohl eine qualitative als auch eine quantitative Betrachtung der vorgegebenen graphischen Darstellung.

Das Lösen dieser Aufgabe verlangt von den Schülern den Transfer zwischen den Darstellungsformen Graph und verbaler / bildlicher Beschreibung auf unterschiedlichen Ebenen: Zunächst wird eine allgemeine qualitative Interpretation des Graphen bezüglich der Situation erwartet. Dabei wird der Graph als Darstellung eines dynamischen Prozesses betrachtet. Die Lernenden sollen erkennen, dass sich die Größe Geschwindigkeit mit der Zeit ändert und es sich somit um unterschiedliche Bewegungssituationen handeln muss. Es handelt sich hierbei also um einen Transfer auf der Prozessebene. Zum Erhalten bestimmter Informationen aus dem Graphen werden im nächsten Schritt Übergänge auf der Aktionsebene benötigt. So müssen aus dem Graphen lokale Maximal- und Minimalgeschwindigkeiten abgelesen und einem Verkehrsmittel oder einer bestimmten Bewegungssituation zugeordnet werden. Die Lernenden ermitteln auf diese Weise zum Beispiel die Anzahl der Stationen, die mit einem bestimmten Verkehrsmittel zurückgelegt wurden und die Dauer von Wartezeiten und Fußwegen.
Das Einzeichnen des Weges in die Karte stellt einen Repräsentationstransfer innerhalb einer Darstellung dar. Die verbale Beschreibung der Situation wird in eine bildliche übersetzt. Diesem Wechsel wird in dem „Haus des funktionalen Denkens“ keine Übersetzungsfertigkeit zugeordnet. Dennoch handelt es sich hierbei um eine interpretative Leistung, da hierfür die Bedeutung der funktionalen Zusammenhän-

ge herangezogen werden muss. So können die Lernenden den Weg durch Abzählen von Stationen einzeichnen und die Längen der Fußwege aufgrund der Dauer schätzen.

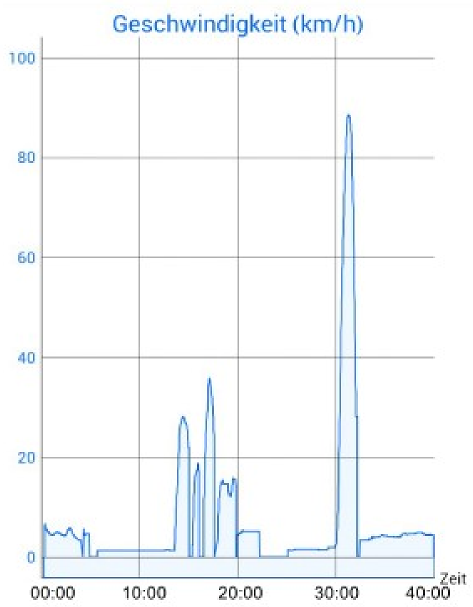


Abbildung 11: Aufnahme aus der App „My Tracks“: Geschwindigkeit-Zeit-Graph.

Für den Fall, dass die Lernenden Schwierigkeiten bei der Interpretation des Graphen haben, sind Hilfestellungen durch die Lehrkraft vorgesehen. Es ist davon auszugehen, dass die Aufforderung, die Bedeutung der Achsen zu erklären, ausreicht um eine detaillierte Interpretation des Graphen anzustoßen. Anderenfalls soll der Repräsentationstransfer durch Fragen gestützt werden. Diese Fragen können lauten: „Wie lange war ich unterwegs?“, „Habe ich vielleicht unterschiedliche Verkehrsmittel benutzt? Wenn ja, woran erkennst du das?“, „Kannst du die Anzahl der Stationen ablesen?“ und „Musste ich irgendwo warten?“.

3.5.2 Die Aufzeichnung des Weges

Im zweiten Teil der Lerneinheit sollen die Lernenden den zuvor beschriebenen Weg zurückfahren und dabei mit der App „My Tracks“ ihre Bewegung aufzeichnen.

Im Vorfeld dazu werden die Schüler aufgefordert anhand des Graphen aus Aufgabe 1 den nun zurückzulegenden Weg zu beschreiben. Dazu müssen sie den Geschwindigkeit-Zeit-Graphen „rückwärts“ lesen, also gedanklich die Richtung des zeitlichen Ablaufs der Bewegung umkehren. Anschließend erhalten sie die Arbeitsaufträge für den Weg und eine kurze Erläuterung zu der Bedienung und den Einstellungen der App.

Für die Aufzeichnung erhalten die Schüler unterschiedliche Aufgaben. Ein Schüler soll mit der entsprechenden Einstellung in der App „Wegpunktmarkierungen“ aufnehmen und zusätzlich ein schriftliches

Bewegungsprotokoll der Reise erstellen. Währenddessen soll der andere einen Geschwindigkeit-Zeit-Graphen aufzeichnen, den beide Schüler während der Bewegung beobachten. Durch diese Beobachtung erhalten sie eine direkte visuelle Rückmeldung zu ihrer Bewegung und können die Entstehung des Graphen verfolgen. Da die zeitliche Veränderung des Graphen mit einer körperlich erlebten Bewegungssituation verknüpft ist, können die Lernenden in ihrer späteren qualitativen Analyse darauf zurückgreifen.

3.5.3 Die Auswertung des Weges

Am Ziel der „Reise“ angekommen, sollen die Schüler die aufgezeichnete Bewegung qualitativ und quantitativ analysieren. Der erste Teil (Aufgabe 2a) stellt eine rein qualitative Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Repräsentationsformen dar.
Zuerst soll die Karte mit den im Abstand von einer Minute gesetzten Wegpunktmarkierungen betrachtet werden. Die Lernenden sollen aus dieser Darstellung Informationen über die unterschiedlichen Bewegungssituationen herauslesen. Durch den Vergleich zwischen schriftlichem Protokoll und dem Geschwindigkeit-Zeit-Graphen soll die funktionale Abhängigkeit zwischen den Größen Zeit, Strecke und Geschwindigkeit entdeckt werden. Ziel ist eine erste Beschreibung der funktionalen Zusammenhänge durch die Schüler. Diese können beispielsweise lauten:„Je schneller wir waren, desto weiter sind die Punkte voneinander entfernt.“ und „Wenn wir standen, sind die Punkte direkt übereinander.“.

Eine Analyse dieser Aufgabenstellung nach dem „Haus des funktionalen Denkens“ ist hier nicht ohne Weiteres möglich, da die Karte mit Wegpunktmarkierungen nicht eindeutig als eine der vier Repräsentationsformen identifiziert werden kann. Es handelt sich auf der einen Seite um eine Beschreibung der Situation in Form eines Bildes. Auf der anderen Seite handelt es sich auch um eine Darstellung, die einem Graphen entspricht. Die Betrachtung dieses „Graphen im Bild“ stellt somit bereits einen permanenten Darstellungswechsel dar. Bei der Interpretation dieser Darstellung findet demzufolge ein Transfer zwischen den drei Darstellungsformen Bild, Graph und verbaler Beschreibung statt. Das Erfassen der Abbildung auf einen Blick mit der Schlussfolgerung, dass verschiedene Bewegungssituationen durch die Anordnung der Wegpunkte abgebildet werden, stellt eine Übersetzug auf der Objektebene dar. Zur Formulierung der funktionalen Zusammenhänge müssen die Schüler die Abstände zwischen den Wegpunktmarkierungen vergleichen und erkennen, dass es sich hierbei um ein Maß für die Geschwindigkeit handelt. Da dafür der „Graph im Bild“ abschnittsweise betrachtet und interpretiert werden muss, handelt es sich hierbei um einen Übergang auf der Prozessebene. Das Zählen der Wegpunkte auf bestimmten Abschnitten oder über die gesamte Strecke zur Bestimmung der Dauer erfordert einen Transfer auf der Aktionsebene.

Im Anschluss an diese erste Interpretation sollen die Lernenden aus ihren Überlegungen und mit Hilfe des Geschwindigkeit-Zeit-Graphen den dazugehörigen Weg-Zeit-Graphen skizzieren. Dabei muss der Anstieg des Graphen als Maß für die Geschwindigkeit erkannt und dementsprechend der Kurvenverlauf skizziert werden. Da davon ausgegangen werden kann, dass diese Aufgabe einigen Schülern Schwierigkeiten bereitet, ist hier eine Hilfestellung durch die Lehrkraft vorgesehen. Diese zeigt den Schülern anhand eines anderen Weg-Zeit-Graphen, wie der Verlauf des Graphen bei einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit aussehen würde. Auf dieser Grundlage können die Lernenden dann abschnittsweise den Graphen skizzieren.

Welcher Repräsentationstransfer zur Lösung der Aufgabenstellung erforderlich ist und auf welcher Ebene er stattfindet, hängt von der Wahl des Lösungsweges der Schüler ab. Skizzieren sie den Weg-Zeit-Graphen anhand des Bewegungsprotokolls, handelt es sich um einen Übergang zwischen verbaler Beschreibung und Graph auf der Prozessebene. Die einzelnen beschriebenen Phasen werden abschnittsweise in die graphische Darstellung übersetzt. Der funktionale Zusammenhang wird dabei als dynamischer Prozess betrachtet. Wird hingegen der Geschwindigkeit-Zeit-Graph zugrunde gelegt um den Weg-Zeit-Graphen zu skizzieren, erfordert dies einen Transfer auf der Objektebene innerhalb der Darstellungsform Graph. Dabei wird der Geschwindigkeit-Zeit-Graph als eigenständiges Objekt betrachtet und aus seinem Kurvenverlauf auf den Verlauf des anderen Graphen geschlussfolgert. Das Gleiche gilt wenn der Lernende den Graphen nach der Hilfestellung erstellt und dazu zusätzlich den Geschwindigkeit-Zeit-Graphen heranzieht. Beim Skizzieren anhand des Abstandes der Wegpunkte handelt es sich, wie bereits erwähnt um einen Transfer zwischen drei Darstellungen. Da der „Graph im Bild“ abschnittsweise betrachtet und aus diesen Schlussfolgerungen der Weg-Zeit-Graph erstellt werden muss, ist hier ein Darstellungswechsel auf der Prozessebene gefordert.

Im zweiten Teil der Auswertung der „Reise“ (Aufgabe 2b) wird zu einer quantitativeren Analyse der Daten übergegangen. Dazu müssen die Schüler die Werte aus den Wegpunktmarkierungen in der App ablesen und in eine Tabelle übertragen. Anschließend soll aus dieser Tabelle der dazugehörige Weg-Zeit-Graph skizziert werden. Dabei gibt die Lehrkraft immer wieder Anstöße über die verschiedenen Darstellungsformen zu diskutieren. Ziel ist die Reflektion der Lernenden über die verschiedenen Repräsentationsformen und die Erkenntnis, dass der Transfer zwischen ihnen sinnvoll ist. Sie vergleichen die verschiedenen Darstellungsformen hinsichtlich ihrer Präsentation bestimmter Informationen über die „Reise“.

Das Übertragen konkreter Werte aus dem „Graphen im Bild“ in die Tabelle stellt einen Transfer auf der Aktionsebene dar. Auch das Übertragen dieser Werte in ein Koordinatensystem erfordert eine Übersetzung auf der Aktionsebene. Reflektieren die Lernenden im Anschluss daran, dass das Verbinden der Punkte im Graphen eine Idealisierung darstellt, da zwischen ihnen eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit vorausgesetzt wird, entspricht dies einer Übersetzungsfertigkeit auf der Prozessebene. Die Schüler betrachten dabei die Funktion als dynamischen Prozess und interpolieren bewusst zwischen den Punkten.

Nach der quantitativen Auswertung des Weges sollen die Schüler den entstandenen Weg-Zeit-Graphen in Phasen unterteilen und mit dem Geschwindigkeit-Zeit-Graphen in der App vergleichen. Damit wird der Rückbezug zur realen Situation hergestellt. Die Lernenden sollen formulieren, wodurch die einzelnen Phasen der Bewegung im Kurvenverlauf beider Graphen erkennbar sind. Darauf aufbauend wird in einem Gespräch mit der Lehrkraft der Verlauf des Geschwindigkeit-Zeit-Graphen qualitativ analysiert.

Dabei sollen die Schüler die markanten Punkte im Graphen erkennen und kontextbezogen deuten sowie den Anstieg des Graphen als Beschleunigen und Bremsen identifizieren. Anhand der Situation der S-Bahn-Fahrt können diese Überlegungen gefördert werden, indem die Lernenden aufgefordert werden die Aktionen des Fahrers während der Fahrt zu beschreiben. An einem Hochpunkt würden die Schüler demzufolge erkennen, dass der Fahrer nicht weiter beschleunigte und langsam abbremste. Auch die Beschreibung der eigenen körperlichen Erfahrung während der Fahrt soll dabei genutzt werden, die Beschleunigung als Anstieg im Kurvenverlauf zu erkennen. So können die Schüler gefragt werden, was sie während der Fahrt spürten, als der Graph steil anstieg. Ziel ist, dass die Lernenden Aussagen treffen, in denen sie den Anstieg des Graphen als Beschleunigung und somit als Maß der Änderung der Geschwindigkeit beschreiben.

Für die qualitative Analyse der Graphen müssen die Schüler unterschiedliche Repräsentationswechsel auf verschiedenen Ebenen vollziehen. Das Unterteilen des Weg-Zeit-Graphen in verschiedene Phasen verlangt einen Transfer in eine verbale Beschreibung auf der Prozessebene. Im darauffolgenden Vergleich der beiden Graphen, betrachten die Schüler die Kurvenverläufe sowohl als Ganzes als auch abschnittsweise. So sollen sie die Monotonie und die zeitliche Abhängigkeit beschreiben und die einzelnen Bewegungssituationen in den Darstellungen vergleichen. Bei der Übersetzung zwischen den Graphen findet also sowohl ein Transfer auf der Objekt- als auch auf der Prozessebene statt.
In der Auseinandersetzung mit den Eigenschaften des Geschwindigkeit-Zeit-Graphen findet ein permanenter Wechsel zwischen den Darstellungsformen Funktionsgraph und verbaler Beschreibung auf der Prozessebene statt, da dabei stets einzelne Abschnitte im Kurvenverlauf intensiv betrachtet werden.

3.5.4 Die Anwendung gewonnener Erkenntnisse auf eine ähnliche Situation

Im letzten Teil der Lerneinheit sollen die Schüler die gewonnenen Erkenntnisse über den funktionalen Zusammenhang der Größen Strecke, Geschwindigkeit und Zeit auf eine neue, aber ähnliche Situation anwenden (Aufgabe 3). Dazu werden ihnen die in Abbildung 12 und 13 gezeigten Repräsentationsformen vorgegeben. Die Orientierung der Karte ist absichtlich so gewählt, dass der Weg von oben nach unten verläuft. Damit soll der in **Kapitel 3.4.1** beschriebene *Graph-als-Bild*-Fehler beim Transfer zwischen den beiden Darstellungen vermieden werden. Die Aufgabenstellungen sind in Anlehnung an die Lernumgebung „Die Reise" bei Andrea Hoffkamp gestaltet (Hoffkamp 2011).

Zuerst werden von den Schülern Übersetzungsfertigkeiten beim Transfer vom Graphen zur verbalen Beschreibung der Situation auf verschiedenen Ebenen erwartet. Auf der Aktionsebene ist das Ablesen bestimmter Werte und deren Deutung anzusiedeln. Die kontextbezogene Interpretation einzelner Abschnitte in der graphischen Darstellung verlangt hingegen einen Transfer auf der Prozessebene. Ebenso stellt das Erkennen von Phasen hoher und geringer Geschwindigkeit anhand der Steigung des Graphen einen Transfer auf dieser Ebene dar.
Das Bestimmen von Durchschnittsgeschwindigkeiten mittels Berechnung des Sekantenanstiegs erfordert von den Lernenden einen neuen Transfer. Die graphische Darstellung muss in einen algebraischen

Ausdruck übersetzt werden. Die rechnerische Bestimmung des Sekantenanstieges erfordert eine solche Übersetzung auf der Prozessebene.
Anschließend sollen bestimmte Markierungen aus dem Graphen in die Karte übertragen werden. Dabei handelt es sich um eine Übersetzung der graphischen Darstellung in eine bildliche Beschreibung auf der Prozessebene, da hier der Verlauf des Graphen dynamisch betrachtet und abschnittsweise gedeutet wird.
Abschließend stößt die Lehrkraft eine Diskussion darüber an, auf welche Art in dem Graphen Geschwindigkeiten zu einem bestimmten Zeitpunkt bestimmt werden könnten. Durch ein fragengeleitetes Gespräch können die Schüler auf die Idee des Überganges vom Sekanten- zum Tangentenanstieg zur Bestimmung der Momentangeschwindigkeit kommen.

Auf die Beobachtungsergebnisse aus der Erprobung dieser Lerneinheit, soll im nachstehenden Kapitel eingegangen werden.

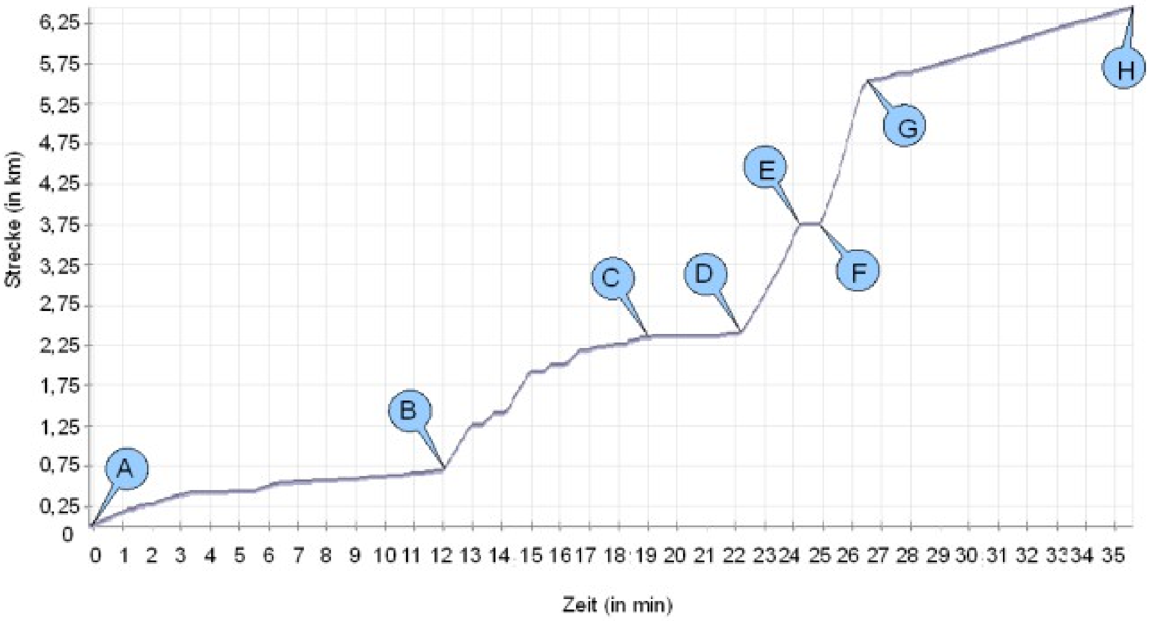


Abbildung 12: Weg-Zeit-Graph der Aufgabe 3 in der Lerneinheit.

Zeichne die Punkte A bis H in die Karte ein!

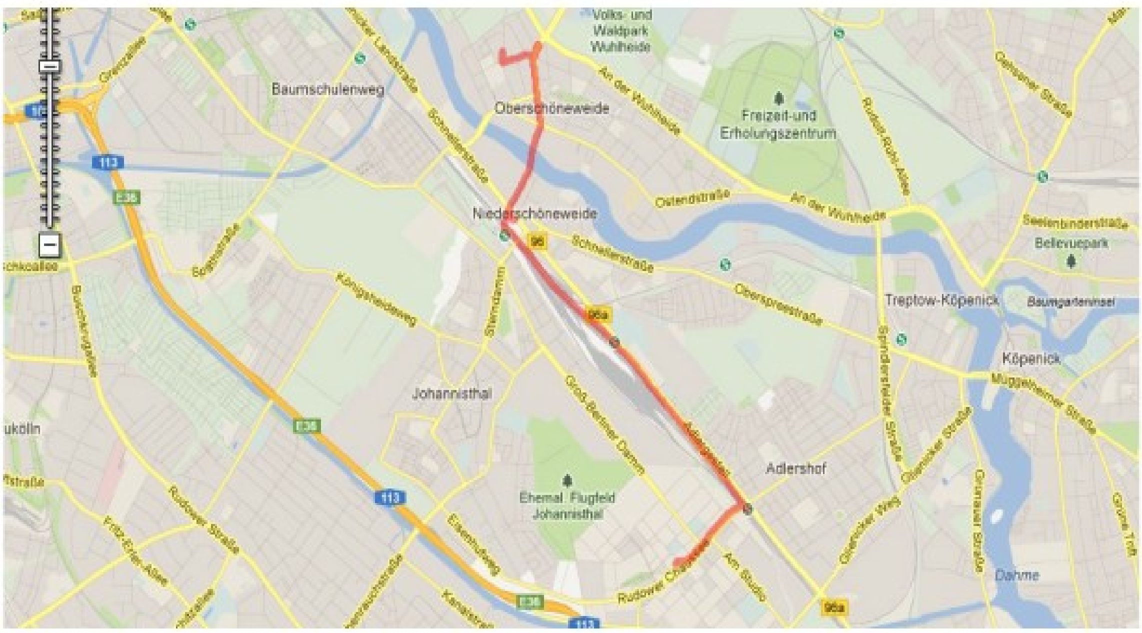


Abbildung 13: Karte mit eingezeichnetem Weg aus der Aufgabe 3.

4. Erste Ergebnisse aus der Erprobung

Die insgesamt vierstündige Lerneinheit wurde zweimal mit je zwei Schülern der achten Klassenstufe durchgeführt. Im Folgenden sollen die Beobachtungen, die während der Erprobung gemacht wurden, beschrieben werden. Bei den Schlussfolgerungen aus diesen Beobachtungen handelt es sich ausdrücklich nicht um allgemeingültige Aussagen, da die Ergebnisse durch die geringe Anzahl an teilnehmenden Schülern nicht repräsentativ sind. Vielmehr soll anhand dieser kleinen Fallstudie das didaktische Potential der Lerneinheit aufgezeigt werden. Zu diesem Zweck bildeten die folgenden Fragen die Beobachtungsgrundlage:

- Welche Erkenntnisse zu den funktionalen Zusammenhängen formulieren die Schüler?
- Unterstützt das Erleben der Bewegungssituation den Repräsentationstransfer?

Zur Beantwortung dieser Fragen dienten Videoaufnahmen[17] aus der Durchführung der Lerneinheit mit den Schülern sowie deren Lösungen auf den Arbeitsblättern.

Durch die Lehrkraft als „teilnehmenden Beobachter“ waren einige Vorteile für die spätere Auswertung der Lerneinheit gegeben. Zum einen konnten auf diese Art die Lösungswege und Antworten der Lernenden hinterfragt werden. Dadurch wurde ein Einblick in die Gedanken und Aktivitäten der Schüler gewonnen. Das Hinterfragen der Gedankengänge war insbesondere für das Analysieren der Übersetzungsfertigkeiten beim Repräsentationstransfer von entscheidender Bedeutung. Zum anderen konnten so Diskussionen und Reflexionen über bestimmte Sachverhalte angestoßen werden. Dies betraf in erster Linie die kontextbezogene Interpretation der Graphen, bei der die Lehrkraft immer wieder Impulse gab über die Bedeutung des Kurvenverlaufs im Allgemeinen oder bestimmte Punkte zu reflektieren.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass es sich bei den vier Schülern, mit denen die Lerneinheit erprobt wurde, um Nachhilfeschüler im Fach Mathematik handelt. Unter diesem Gesichtspunkt sind die folgenden allgemeinen Beobachtungen zu der Lerneinheit zu betrachten:
Die Lernenden arbeiteten über vier Stunden konzentriert und voller Forschungseifer mit. Sie betrieben intensiv mathematische Betrachtungsweisen und trafen dabei (teilweise unerwartet präzise) Äußerungen zu funktionalen Zusammenhängen.
Die Schüler schickten noch eine Woche nach der Erprobung GPS-Aufzeichnungen verschiedenster Aktivitäten per E-Mail an die Lehrkraft.

17 Die Eltern der Kinder bestanden darauf, dass diese Aufnahmen nur zur späteren Analyse genutzt und nicht Dritten zur Verfügung gestellt werden.

4.1 Ergebnisse zu den Beobachtungsschwerpunkten

Zur Beantwortung der Fragen, die die Beobachtungsschwerpunkte für die Auswertung der Lerneinheit bildeten, wurde folgendermaßen vorgegangen. Die Videoaufzeichnungen der Erprobung wurden gesichtet und jene Abschnitte markiert, die Schüleräußerungen zu funktionalen Zusammenhängen oder über ihre Ansätze zum Repräsentationstransfer beinhalteten. Eine klare Unterscheidung zwischen den beiden Aspekten war nicht immer möglich, da sie oftmals miteinander einhergingen. Anschließend wurden ausgewählte Abschnitte aus den Aufzeichnungen transkribiert, wenn sie zur Beantwortung einer der Forschungsfragen diente. Zusätzlich wurden die Lösungen der Schüler zu den einzelnen Aufgaben herangezogen.

4.1.1 Welche Erkenntnisse zu den funktionalen Zusammenhängen formulieren die Schüler?

Ein Ziel der Lerneinheit war, dass die Lernenden die funktionalen Zusammenhänge ihrer Bewegung selbst entdecken können. Diese Zielsetzung wurde erfüllt, wie viele Schüleräußerungen, von denen einige im Folgenden exemplarisch vorgestellt werden, zeigen.

Bei der Auseinandersetzung mit den Wegpunkten auf der Karte arbeiteten die Schüler zusammen und diskutierten dabei darüber, welche Informationen über die Bewegung man aus den Markierungen erhalten kann. Dabei kam es zu diesem Wortwechsel:

L: *„Na was sind denn diese Stecknadeln auf der Karte?"*

S1: *„Da, da waren wir. Also da sind wir lang gelaufen. Da wurde dann so ein Ding gesetzt."*

L: *„Aha!"*

S2: *„Das ist wie bei 'Hänsel und Gretel' mit den Brotkrümeln. Damit die Eltern wissen, wo sie langgelaufen sind."*

L: *„Was haben wir denn anders gemacht als Hänsel und Gretel?"*

S2: *„Wir haben keine Brotkrümel geworfen!?"* (Die Schüler lachen. Es folgt eine kurze Phase, in der die Schüler Witze machen.)

S1: (Der Schüler sucht den Arbeitsauftrag für den Weg heraus und ließt ihn sich nochmal durch) *„Na bei uns war das doch so eingestellt, dass genau jede Minute eine Wegpunktmarkierung gemacht wurde."*

S2: *„Jo. Hätten Hänsel und Gretel das auch so gemacht, hätten die Eltern auch gewusst, ob die Kinder irgendwo weggerannt sind oder Pause gemacht haben."*

Hier erkennen die Schüler als erstes, dass die Markierungen entlang des Weges verteilt sind. Erst nach dem Lesen des Arbeitsauftrags für den Weg verstehen sie, dass die Punkte in gleichen zeitlichen Abständen gesetzt wurden und damit die unterschiedlichen Abstände zwischen ihnen durch verschiedene Geschwindigkeiten zurückzuführen sind. Daraufhin notiert einer der beiden Schüler, die in Abbildung 14 gezeigte Antwort.
Der Schüler erklärt hier sowohl, dass aus dem Abstand der Wegpunkte auf die Geschwindigkeit geschlussfolgert werden kann als auch, dass es sich um eine zeitabhängige Größe handelt. Er beschreibt die funktionale Abhängigkeit der Streckenlängen von der Geschwindigkeit in dem jeweiligen Zeitabschnitt. Ähnliche Ergebnisse fanden sich auch bei den anderen Schülern, wobei nicht alle darauf eingingen, dass die Wegpunkte in einem zeitlich konstantem Abstand gesetzt wurden.

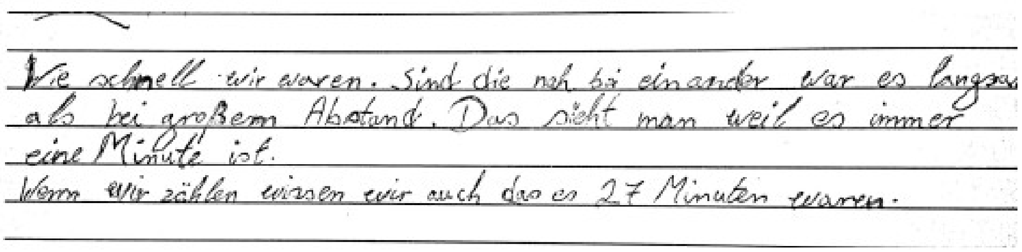

Wie schnell wir waren. Sind die noh bi einander war es langsa
als bei großem Abstand. Das sieht man weil es immer
eine Minute ist.
Wenn wir zählen wissen wir auch das es 27 Minuten waren.

Abbildung 14: Schülerantwort zu der Frage: „Welche Informationen darüber, wie wir uns bewegt haben, kannst du aus den Wegpunkten ablesen?"

Das anschließende Skizzieren des Weg-Zeit-Graphen bereitete den Lernenden unerwarteter Weise keine Schwierigkeiten. Lediglich ein Schüler benötigte die Hilfestellung der Lehrkraft als Lösungsansatz für diese Aufgabe. Ein Schüler erklärte seinem Mitschüler dabei:

> *„Hier hast du ja immer die unterschiedlichen Abstände.* (Zeigt dem Mitschüler die Wegpunktmarkierungen in der App und zeigt durch eine Geste mit den Fingern, dass er den räumlichen Abstand zwischen den Wegpunkten auf der Karte meint.) *Jede Minute kommt ein so'n Stück dazu. Also wird der zurückgelegte Weg immer mehr. Das muss also so* (Geste mit der Hand, dass etwas steigt.) *nach oben gehen."*

Der Lernende erläutert hier die Monotonie des Graphen noch *bevor* er ihn gezeichnet hat. Er scheint also durch die Auseinandersetzung mit den Wegpunkten bereits eine Idee zum Änderungsverhalten der Strecke mit der Zeit entwickelt zu haben. Er skizziert im Anschluss den Graphen in Abbildung 15. Dabei ist ihm auch bewusst, dass sich die Geschwindigkeit durch den Anstieg des Graphen darstellen lässt. Es konnte beobachtet werden, dass der Schüler den Graphen zuerst richtig skizzierte. Dann verunsicherte ihn, dass er im Gegensatz zu seinem Mitschüler nicht den gesamten Platz genutzt hat und verlängerte den letzten Abschnitt. Dabei schien er nicht weiter darüber zu reflektieren, was die Verlängerung bedeutet. Im späteren Vergleich mit dem quantitativen Weg-Zeit-Graphen erkannte er jedoch seinen Fehler.

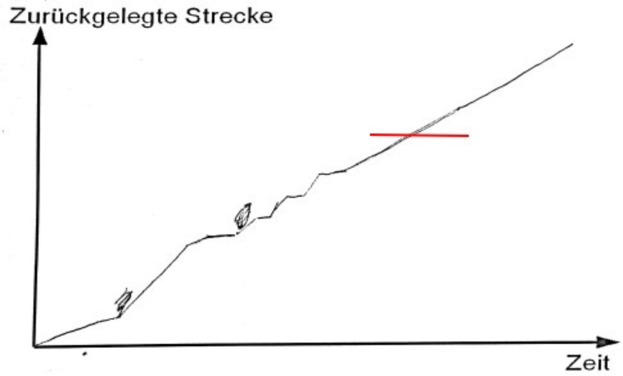


Abbildung 15: Lösung eines Schülers zu der Aufgabe „Skizziere aus deinen Überlegungen, wie der Weg-Zeit-Graph aussehen könnte.“. Die rote Linie zeigt das ursprüngliche Ende des Kurvenverlaufs, bevor der Schüler diesen aus Verunsicherung verlängerte.

Bei der quantitativen Auswertung der Messung konnten keine Äußerungen wahrgenommen werden, in denen die Lernenden Aussagen über neue Erkenntnisse zu den funktionalen Zusammenhängen formulierten. Erst bei der anschließenden Diskussion über die Darstellungsformen finden sich Äußerungen zur funktionalen Abhängigkeit der Strecke von der Zeit. Auf die Frage, was in den Repräsentationsformen Tabelle und Graph besonders gut zu erkennen ist, antwortete ein Schüler:

> *„Dass der Weg aus mehreren Teilstücken zusammengesetzt ist, die meistens unterschiedlich lang sind. Aber in Wirklichkeit ist das doch gar nicht so, oder?* (Der Schüler schaut zu der Lehrkraft) *Wir sind ja nicht eine Minute genau so schnell gelaufen und in der nächsten anders.* (Längere Pause. Der Schüler betrachtet Graphen) *Also eigentlich dürften wir da keine Linie ziehen, weil wir nicht wissen was zwischen den Punkten los ist.“*

Der Schüler erkennt hier, dass durch den großen zeitlichen Abstand der Messpunkte von einer Minute die graphische Darstellung idealisiert wird. Er formuliert sogar, welche Idealisierung vorgenommen wird. Er deutet hier den funktionalen Zusammenhang zwischen den Größen Strecke und Geschwindigkeit und schließt aus dem abschnittsweise linearen Verlauf auf die Idealisierung konstanter Geschwindigkeit zwischen zwei Punkten.

Bei der qualitativen Analyse des Geschwindigkeit-Zeit-Graphen im Gespräch trafen die Lernenden, wie erwartet, Aussagen über die Bedeutung der lokalen Extremstellen. So erkannten sie, dass die lokalen Hochpunkte im Kurvenverlauf die Stellen sind, in deren Umgebung kein Punkt eine höhere Geschwindigkeit anzeigt. Des Weiteren identifizierten sie den Anstieg als Beschleunigen und Bremsen und unterschieden auch zwischen starker und schwacher Beschleunigung. Sie trafen also sowohl Aussagen über die Änderung der Geschwindigkeit, als auch über die Qualität dieser Änderung. Die Schüler hatten jedoch Schwierigkeiten dabei ihre Einsichten sprachlich zu verdeutlichen. So zeigten sich beispielsweise gedankliche Hürden beim Treffen von Aussagen, die die Abnahme der Beschleunigung betrafen. So verwirrte es die Schüler oftmals, dass eine Abnahme der Geschwindigkeitsänderung (also die Abnahme

der Beschleunigung) eine Geschwindigkeitszunahme bedeuten kann. Diese gegensinnige Orientierung von Änderung des Bestandes und Qualität dieser Veränderung und die damit verbundenen Schwierigkeiten zeigten sich auch schon in den Untersuchungen von Steffen Hahn und Susanne Prediger (Hahn/Prediger 2008). Hilfreich war jedoch, dass den Lernenden für die negative Beschleunigung der Begriff „Bremsen“ aus dem alltäglichen Sprachgebrauch zur Verfügung stand. Es wurde in der Diskussion mit den Schülern sehr deutlich, wie wichtig eine detaillierte Auseinandersetzung mit dem Änderungsverhalten für das Erlangen eines mathematischen Verständnisses über den Kurvenverlauf ist.
Die Lernenden trafen auch Aussagen über die Qualität der Änderung an den Extremstellen. Sie schlussfolgerten aus dem Wechsel zwischen Beschleunigen und Bremsen an diesen Stellen, dass für einen Augenblick keine Änderung stattfindet. Über die Bedeutung der Wendepunkte als Stellen, an denen die Qualität der Änderung zwischen gleich- und gegensinnig wechselt, konnte mit den Lernenden nicht diskutiert werden, da solch ein Punkt in dem Geschwindigkeit-Zeit-Graphen nicht eindeutig erkennbar war.

Im letzten Abschnitt der Lerneinheit sollten die Schüler ihre gewonnenen Erkenntnisse über die funktionalen Zusammenhänge in einer neuen Situation anwenden. Die Lösung der Aufgabe gelang allen Schülern. Überraschend war, dass ein Schüler im Vorfeld der Bearbeitung der Aufgaben anhand des vorgegebenen Weg-Zeit-Graphen einen Geschwindigkeit-Zeit-Graphen skizzierte. Da er aus dem Verlauf des Graphen auf den des „Ableitungsgraphen“[18] schloss, hat er laut Analyse nach dem „Haus des funktionalen Denkens“ an dieser Stelle seine Erkenntnisse über den funktionalen Zusammenhang zwischen Strecke und Geschwindigkeit für einen Übergang auf der Objektebene genutzt. Das Ergebnis dieser Transferleistung ist in Abbildung 16 zu sehen. Dass er den Kurvenverlauf der zeitlichen Änderung des Bestandes (also der Strecke) tatsächlich verstanden hat, zeigt sich auch darin, dass die Markierungen A bis H in die neue Darstellung übertragen wurden und an seinen Äußerungen in der anschließenden Diskussion der Ergebnisse:

> *„Ich hab hier immer geguckt, wie steil es ist. Dann weiß ich ja ob das schneller oder langsamer wird. Hier wo es so ruckelig aussieht* (Der Schüler zeigt auf den Abschnitt B-C.)*, geht's dann immer schnell, langsam, schnell, langsam. Das kann also nur die Straßenbahn sein. Hier* (Der Schüler deutet auf den Abschnitt D-E.) *ist die Beschleunigung sehr groß, das ist dann also die S-Bahn, danach auch. Und das danach* (Der Schüler zeigt auf den letzten und danach auf den Abschnitt A-B.) *kennt man ja schon vom Anfang.“*

Bis auf die Verwechslung der Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung beschreibt der Lernende hier sehr detailliert und fachlich richtig den Zusammenhang zwischen dem Verlauf des Weg-Zeit- und der Form seines Geschwindigkeit-Zeit-Graphen. Dabei nutzt er nicht nur mathematische Erkenntnisse sondern auch Rückbezüge zur beschriebenen Situation. Darum soll auf diese Lösung des Schülers im nächsten Kapitel noch einmal eingegangen werden.

---

18 Das Wort Ableitungsgraph ist hier in Anführungszeichen gesetzt, da es strittig ist, ob es sich hierbei tatsächlich um graphisches Differenzieren handelt oder der Schüler den Graphen mit Rückbezug zur realen Situation skizziert hat.

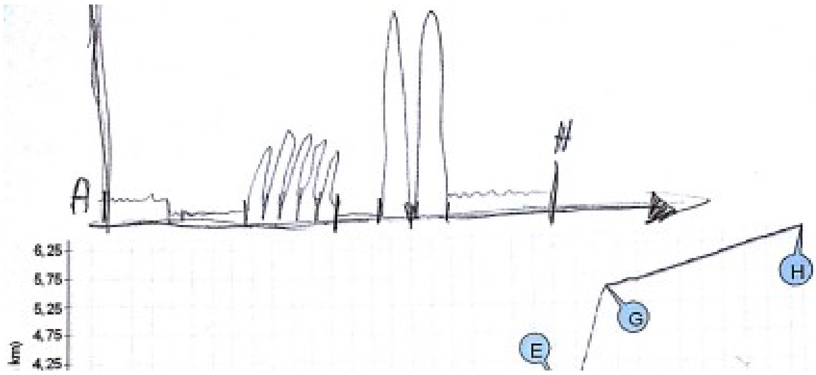


Abbildung 16: Von einem Schüler angefertigte Skizze eines Geschwindigkeit-Zeit-Graphen zu dem Weg-Zeit-Graphen in Aufgabe 3.

4.1.2 Unterstützt das Erleben der Bewegungssituation den Repräsentationstransfer?

Durch den experimentellen Zugang erhielten die Lernenden die Möglichkeit mehrere Bewegungssituationen bewusst körperlich zu erfahren und zusätzlich durch die simultane Entstehung eines Geschwindigkeit-Zeit-Graphen eine direkte Rückmeldung zu ihrer Bewegung zu erhalten. In der späteren Auswertung und bei der Erkundung funktionaler Zusammenhänge konnten die Schüler auf diese Erfahrungen zurückgreifen. Dass dieser direkte Rückbezug den Transfer zwischen den Darstellungen und insbesondere die Interpretation der Graphen unterstützt hat, soll in den nachfolgenden Beispielen verdeutlicht werden.

Zunächst soll hier noch einmal auf den in Abbildung 16 gezeigten Transfer zwischen zwei Graphen und auf die Aussagen des Schülers eingegangen werden. Seine Erläuterungen legen die Vermutung nah, dass der Schüler nicht rein graphisch differenziert hat, sondern auch Erfahrungen aus der erlebten Situation und aus der Entstehung des Geschwindigkeit-Zeit-Graphen in der App zur Erstellung seines Graphen genutzt hat. Zum einen nimmt er in seiner Erklärung, wie er den Graphen skizziert hat, immer wieder Bezug zu der beschriebenen Situation. Er hat also den Weg-Zeit-Graphen zumindest abschnittsweise vor oder während des Skizzierens interpretiert. Zum anderen weisen einige Feinheiten in seinem Graphen darauf hin, dass er die Entstehung des Geschwindigkeit-Zeit-Graphen bei der selbst erlebten „Reise“ dabei in Erinnerung hatte. So ist in dem Weg-Zeit-Graphen auf den Abschnitten D-E, F-G und G-H eine Bewegungen mit nahezu konstanter Geschwindigkeit dargestellt. Trotzdem zeichnet der Schüler die Geschwindigkeitsänderung, die er bei der S-Bahn-Fahrt selbst auf dem Bildschirm beobachten konnte. Auch bei den Phasen, die den Fußweg beschreiben, skizziert er den Graphen so wie ihn die App darstellen würde. Da er (bis auf den bereits erwähnten kleinen Fehler) den funktionalen Zusammenhang richtig beschreibt, kann davon ausgegangen werden, dass der Bezug zur erlebten Situation den Übergang zwischen den Darstellungen unterstützt. Dies schmälert in keinster Weise die Leistung des Lernenden. Da er zusätzlich zum Darstellungstransfer den Graphenverlauf situationsbezogen interpretiert, verlangt sein Lösungsweg viel komplexere Überlegungen als das sture Anwenden einer Vorschrift zum

graphischen Differenzieren.
Die Schüler griffen die Erfahrungen aus der selbst erlebten „Reise“ generell sehr häufig auf. So hat beispielsweise bei der Auswertung des Weges kein Schüler das schriftliche Protokoll genutzt. Stattdessen rekonstruierten sie den Ablauf aus dem Gedächtnis und verglichen diese Erinnerung mit den verschiedenen Darstellungen. Insbesondere bei der Interpretation des Geschwindigkeit-Zeit-Graphen wurde deutlich, dass die Schüler von der direkten Entstehung des Graphen während der Bewegung profitieren. So sagte ein Schüler:

> *„Wir haben gesehen, dass die Linie ganz schnell nach oben ging und dann gleich wieder runter. Der S-Bahn-Fahrer ist also nie auf einer Geschwindigkeit gefahren, sondern ist immer schneller geworden und hat dann am höchsten Punkt gleich wieder auf die Bremse gedrückt.“*

Der Schüler erklärt hier die Bedeutung des Hochpunktes, indem er seine Entstehung im Graphen während der Fahrt beschreibt. Der Transfer zwischen der graphischen Darstellung und der verbalen Beschreibung wird hier also durch die direkte Rückmeldung in der App gefördert. Ein anderer Schüler beschreibt die Abnahme und Zunahme des Anstiegs im Graphen während der S-Bahn-Fahrt folgendermaßen:

> *„Dass der Fahrer am Anfang schnell beschleunigt hat, hat man ja beim Stehen in der Bahn gemerkt. Genauso beim Bremsen kurz vorm Bahnhof, wenn man gegen die anderen Leute gerempelt ist.“*

Hier beschreibt der Lernende seine körperliche Erfahrung direkt und schließt dadurch auf die Qualität des Änderungsverhaltens im Geschwindigkeit-Zeit-Graphen. Er erklärt hier, dass bei der Fahrt zwischen zwei Stationen die Änderung der Geschwindigkeit zu Beginn und zum Ende hin am stärksten ist. Erklärungen dieser Art konnten bei allen Schülern während der Diskussion beobachtet werden. Die körperliche Erfahrung und das Erleben der funktionalen Zusammenhänge sowie die direkte Rückmeldung durch den Graphen unterstützen die Schüler also zumindest bei der Übersetzung graphischer Darstellungen in verbale Beschreibungen und bei dem Transfer von einem Graphen in einen anderen. Ob auch bei den anderen Darstellungswechseln diese Aspekte des experimentellen Zugangs einen positiven Einfluss auf die Übersetzungsfertigkeiten der Lernenden haben, konnte bei dieser Beobachtung nicht festgestellt werden.

4.2 Auseinandersetzung mit der Darstellung von Wegpunktmarkierungen in der Karte

Wie bereits in der Vorstellung der Lerneinheit angesprochen, nahm die Darstellung von Wegpunktmarkierungen eine Sonderstellung gegenüber den anderen Repräsentationsformen ein. Auf die Besonderheiten und die damit verbundenen Konsequenzen für eine zukünftige Verwendung dieser Darstellungsform, soll im Folgenden eingegangen werden.
Die erste Erprobung mit Schülern hat bereits gezeigt, dass die Darstellung von Bewegungssituationen

über Wegpunktmarkierungen eine neue Möglichkeit bietet den funktionalen Zusammenhang zwischen den Größen Zeit, Strecke und Geschwindigkeit für die Schüler anschaulich zu machen. Sie ermöglicht das Erfassen aller drei Größen mit einem Blick: Die einzelnen Wegpunkte markieren konkrete Zeitpunkte, während der Abstand zweier Markierungen eine Strecke in der Karte begrenzt und der Vergleich von Abständen auf die Geschwindigkeit schließen lässt. Da das „Lesen" dieser Repräsentationsform von den Schülern stets eine Betrachtung mit Hinblick auf Veränderung und Bewegung verlangt, wird durch die Auseinandersetzung mit ihr kinematisch-funktionales Denken gefördert. Darüber hinaus stellt der Umgang mit dieser Darstellung, wie in **Kapitel 3.5.3** erläutert, immer auch eine Transferleistung dar. Diese Darstellung kann somit sehr gewinnbringend in Aufgabenstellungen zum funktionalen Zusammenhang kinematischer Vorgänge verwendet werden. Dabei kann sie, wie in der Lerneinheit umgesetzt, als Bindeglied zwischen der Beschreibung einer Situation und deren Darstellung im Graphen eingesetzt werden. Dies kann den Schülern den Übergang zu der abstrakten Darstellungsform Graph erleichtern. In der Lerneinheit zeigte sich dies darin, dass die Lernende nahezu problemlos den Verlauf des Weg-Zeit-Graphen anhand der Darstellung von Wegpunkten skizzieren konnten.

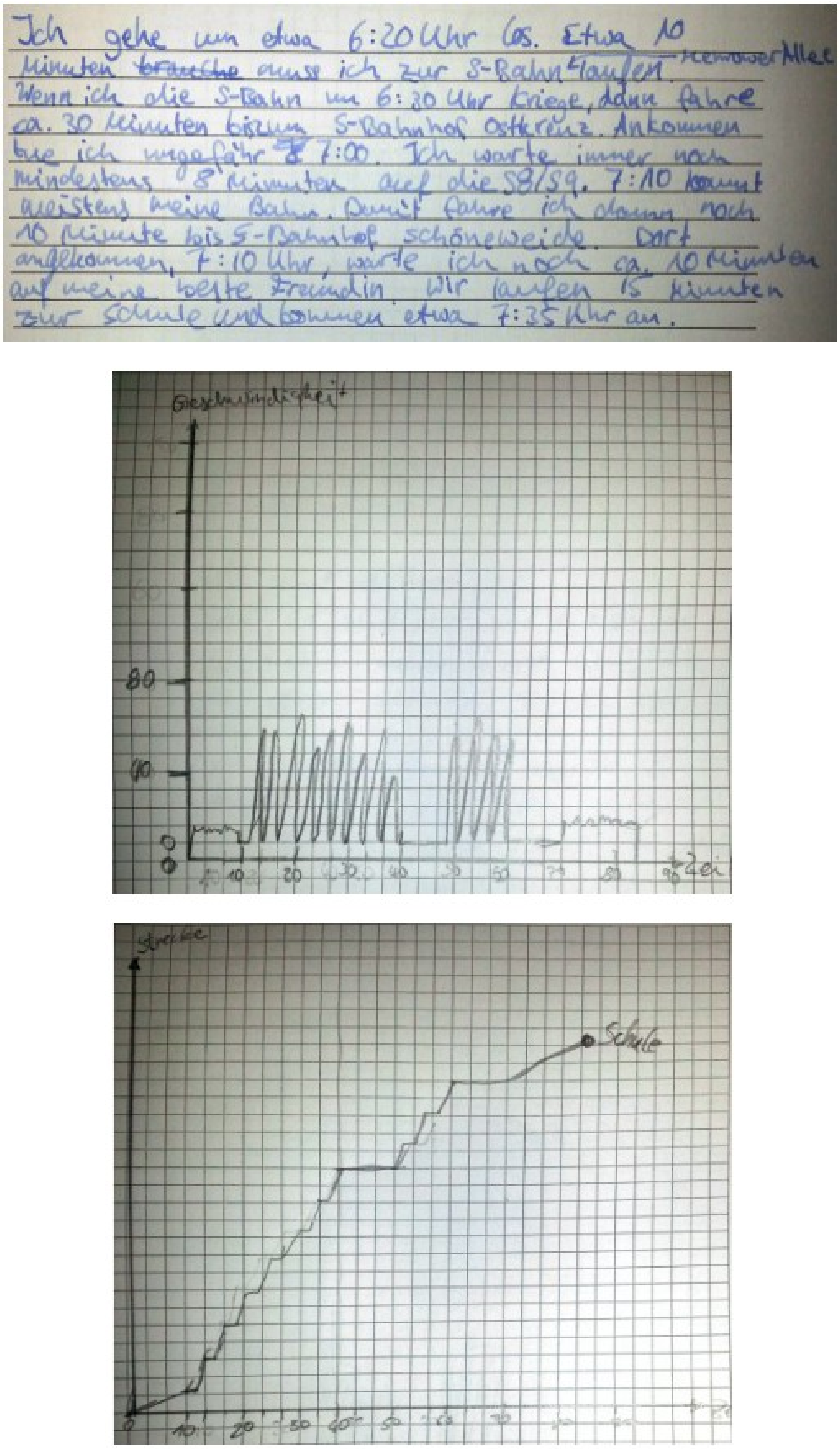
Eine Verwendung dieser Darstellung losgelöst von Betrachtungen der dazugehörigen Graphen sollte vermieden werden. Die gleichzeitige Veranschaulichung von Karte und funktionaler Abhängigkeit kann die Neigung zu Fehlinterpretationen von Graphen verstärken. Der *Graph-als-Bild-Fehler* beruht darauf, dass die Schüler den Graphen als quasi-fotographische Abbildung deuten. Eine unreflektierte Verwendung der Wegpunktmarkierungen in der Karte kann genau diese Fehlinterpretation provozieren. Hingegen kann eine intensive Auseinandersetzung mit den Unterschieden von Wegpunktmarkierungen und Graphen dieser Fehlvorstellung entgegenwirken.

4.3 Nachtest

Einen Monat nach Durchführung der Lerneinheit wurden zwei Schüler gebeten ihren Schulweg schriftlich zu beschreiben und die dazugehörigen Graphen zu zeichnen. Diese Aufgabe wurde ursprünglich für die Verwendung in der Lerneinheit konzipiert, dann aber aus Zeitgründen gestrichen. Die Arbeitsblätter für die Schüler sind in Anhang 4 zu finden. Ziel war es herauszufinden, ob die Lernenden die Erkenntnisse zu funktionalen Zusammenhängen in graphischen Darstellungen verinnerlicht haben und einige Wochen nach dem Erlernen reproduzieren können. Die Lösung der Aufgabe war bei beiden Schülern von ähnlicher Qualität, weshalb hier in Abbildung 17 nur eine Schülerantwort gezeigt wird.

Man konnte beobachten, dass die Lernenden einen Moment brauchten, sich daran zu erinnern, was sie in der Lerneinheit gelernt hatten. Das Skizzieren der Graphen anhand ihrer Beschreibung bewältigten sie dann aber ohne Schwierigkeiten. Die Abhängigkeit der Größen wurde in den Graphen richtig dargestellt und auch der Zusammenhang zwischen Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Graphen scheint verinnerlicht worden zu sein.

Auch wenn aus der Lösung zweier Schüler keine allgemeingültigen Aussagen gezogen werden können, entsteht hier doch der Eindruck, dass durch die Lerneinheit das kinematisch-funktionale Denken der Schüler nachhaltig gefördert werden konnte.



Ich gehe um etwa 6:20 Uhr los. Etwa 10 Minuten ~~brauche~~ muss ich zur S-Bahn laufen. [illegible] Allee
Wenn ich die S-Bahn um 6:30 Uhr kriege, dann fahre ca. 30 Minuten bis zum S-Bahnhof Ostkreuz. Ankommen bin ich ungefähr ~~8~~ 7:00. Ich warte immer noch mindestens 8 Minuten auf die S8/S9. 7:10 kommt meistens meine Bahn. Damit fahre ich dann noch 10 Minute bis S-Bahnhof Schöneweide. Dort angekommen, 7:10 Uhr, warte ich noch ca. 10 Minuten auf meine beste Freundin. Wir laufen 15 Minuten zur Schule und kommen etwa 7:35 Uhr an.

Abbildung 17: Lösung eines Schülers zu der Aufgabe: „Beschreibe in Worten deinen Schulweg und skizziere die dazugehörigen Graphen." ungefähr 4 Wochen nach der Lerneinheit.

5. Ansätze zur Umsetzung und Erweiterung der Lerneinheit

Aus der ersten Erprobung der Lerneinheit mit Schülern wurde ersichtlich, dass diese Art der Auseinandersetzung mit kinematischen Vorgängen tiefgreifende mathematische Kenntnisse zu funktionalen Zusammenhängen und Fertigkeiten im Transfer zwischen den Darstellungsformen schult. Die Möglichkeit eines solchen experimentellen Zugangs und der qualitativ-inhaltlichen Auseinandersetzung mit funktionaler Abhängigkeit ist somit für den Mathematikunterricht von großem Interesse.
Im folgenden Kapitel soll gezeigt werden, wie die hier beschriebene Lerneinheit auch im Unterricht umgesetzt werden kann. Außerdem werden Ideen zu Aufgaben zur Fortsetzung der Lerneinheit im Unterricht der Sekundarstufe I vorgestellt.
Die Aufzeichnung von GPS-Daten bietet zudem die Möglichkeit die Thematik auf eine quantitative Auswertung und auf Betrachtungen zur Modellbildung auszuweiten. Auf einige Ideen dazu soll in **Kapitel 5.2** kurz eingegangen werden.

5.1 Umsetzung der Lerneinheit im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I

Eine Umsetzung der Lerneinheit im Unterricht verlangt zunächst von der Lehrkraft zeitaufwendige Vorbereitungen. So muss eine geeignete Strecke mit mindestens zwei verschiedenen Verkehrsmitteln und einem ausreichend langem Fußweg gesucht werden. Die Lehrkraft muss diese Strecke mit der App „My Tracks“ aufzeichnen und die Darstellungen für den Unterricht aufarbeiten. Für die Erstellung einer weiteren Aufgabe zur Anwendung des Gelernten auf eine ähnliche Situation ist wieder eine geeignete Strecke zu suchen und aufzuzeichnen. Die Darstellungsformen sind wie auf dem Arbeitsblatt der Aufgabe 3 (Anhang 3) aufzuarbeiten.
Voraussetzung für die Umsetzung im Unterricht ist auch, dass ausreichend Schüler ein Smartphone mit dem Android-Betriebssystem besitzen. Die Schülergruppen sind also so zu wählen, dass in einer Gruppe von beispielsweise sechs Lernenden mindestens zwei ein solches Smartphone besitzen.
Die mögliche Umsetzung der Lerneinheit in einer Unterrichtsequenz ist in der nachstehenden Tabelle gezeigt. Für Einzelheiten zu den Inhalten der Unterrichtsgespräche und zu Formulierung der Aufgabenstellungen sei auf **Kapitel 3.5** und den Anhang 3 verwiesen.
Die Tatsache, dass mehrere Schüler den gleichen Weg aufzeichnen und sich dadurch unterschiedliche Graphen und Wegpunktmarkierungen ergeben (unterschiedliches Tempo, unterschiedliche Wartezeiten), kann gewinnbringend in die Diskussion über die funktionalen Zusammenhänge eingebunden werden, da durch den Vergleich unterschiedlicher Aufzeichnungen die funktionale Abhängigkeit der Größen verdeutlicht werden kann.

Stundeninhalt / Hausaufgaben	**Umsetzung**
1. Stunde: **Einstiegsaufgabe**	Schüler lösen Aufgabe in Einzelarbeit. Vorstellung der Ergebnisse und Unterrichtsgespräch zum „Rückwärtsfahren“ der Reise. Erklärung der Bedienung und der Einstellungen der App. Einteilung der Gruppen für die Hausaufgabe.
Hausaufgabe: **Aufzeichnung des Weges**	Schüler haben eine Woche Zeit, den Weg aus der ersten Aufgabe in umgekehrter Richtung zu fahren. Arbeitsaufträge: ● Schüler mit Smartphone werden in zwei Gruppen geteilt: Erste Gruppe erstellt v-t-Graphen während der Aufzeichnung. Zweite Gruppe nimmt während der Fahrt Wegpunktmarkierungen auf. ● Schüler ohne Smartphone fahren die Strecke und erstellen dabei ein schriftliches Bewegungsprotokoll.
2. und 3. Stunde: **Auswertung des Weges** (Aufgabe 2a)	Einteilung der Schüler in Kleingruppen, so dass von jedem Arbeitsauftrag (v-t-Graph, Wegpunktmarkierungen, Bewegungsprotokoll) mindestens ein Schüler in jeder Gruppe ist. Erarbeitung der qualitativen Auswertung in den Kleingruppen. Präsentation der Ergebnisse und Diskussion über die funktionalen Zusammenhänge im Unterrichtsgespräch.
Hausaufgabe: **Auswertung des Weges** (Aufgabe 2b)	Dazu muss in jeder Gruppe die Aufzeichnung der Wegpunktmarierungen für alle Schüler zur Verfügung gestellt werden. Entweder durch Übertragen des Tracks auf die anderen Smartphones oder dadurch, dass Mitschüler die ersten zwei Spalten der Tabelle (Aufgabe 2b, Anhang 3) ausfüllt und an die Mitschüler sendet. Alle Schüler erstellen (bzw. vervollständigen) die Tabelle und erstellen einen s-t-Graphen.
4. Stunde: **Besprechung der Hausaufgabe**, **Anwendung des Gelernten auf eine ähnliche Situation** (Aufgabe 3)	Präsentation der Ergebnisse der Hausaufgabe. Unterrichtsdiskussion über den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit-Zeit- und Weg-Zeit-Graph. Unterrichtsgespräch über die markanten Punkte und den Kurvenverlauf des v-t-Graphen. Schüler bearbeiten die Aufgabe 3 in Einzelarbeit. Unterrichtsgespräch zur Auswertung der Aufgabe und Gespräch über den Übergang von der Durchschnitts- zur Momentangeschwindigkeit

Tabelle 1: Möglicher Ablauf einer Unterrichtsequenz auf Grundlage der Lerneinheit.

An dieser Stelle sollen einige Ideen zu Aufgaben vorgestellt werden, die ebenfalls im Unterricht umsetzbar sind.

Die Schüler können ihren Schulweg mit der App aufzeichnen und den entsprechenden Weg-Zeit-Graphen erstellen. Dafür kommen mehrere Möglichkeiten in Frage, aus denen die Lehrkraft für die Formulierung des Arbeitsauftrags wählen kann: Entweder sollen die Schüler den Graphen qualitativ skizzieren, ihn aus den Wegpunkten erstellen oder auf einer Internetseite zur Auswertung von GPS-Datensätzen erstellen lassen. Aus den Ergebnissen aller Schüler kann anschließend von der Lehrkraft ein Memory-Spiel erstellt werden, in dem die jeweils zusammengehörigen Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Graphen gefunden werden müssen. Dieses Graphen-Memory eignet sich zum Einsatz im Unterricht als Partnerarbeit.

Eine weitere Idee für eine Aufgabenstellung wurde bereits im Vorfeld dieser Arbeit in einem Vortrag zum Thema „Experimentieren im Mathematikunterricht“ als Aufgabe für Studenten verwendet. Diese Aufgabe ist in Abbildung 18 gezeigt. Die Studenten sollten mit Hilfe des Graphen herausfinden wo der Startpunkt der „Reise“ war. Eine solche Aufgabenstellung ist auch für die Verwendung im Unterricht denkbar. Sie animiert dazu Vermutungen aufzustellen und zu überprüfen. Dabei wird ein permanenter Wechsel zwischen den Darstellungsformen Graph und Beschreibung gefordert.

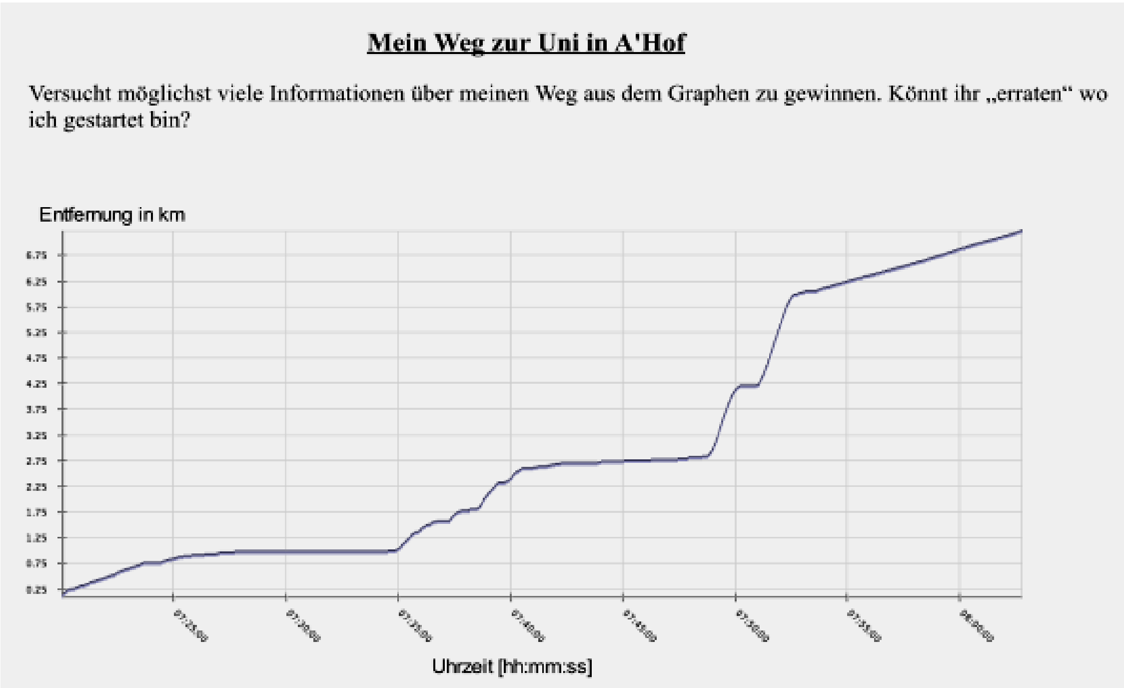


Abbildung 18: Aufgabe für Studenten bei einem Vortrag zum Thema „Experimentieren im Mathematikunterricht“.

Ähnlich zu der Darstellungsform der Wegpunktmarkierungen in der Karte können Stroboskopaufnahmen zur qualitativen Untersuchung funktionaler Zusammenhänge im Unterricht eingesetzt werden. So können die Lernenden aus solchen Aufnahmen von einem Ball im freien Fall oder dem waagerechten Wurf die funktionalen Zusammenhänge der Größen Höhe, Geschwindigkeit und (Erd-) Beschleunigung qualitativ erarbeiten und die entsprechenden Graphen skizzieren.

5.2 Ideen zur Erweiterung der Lerneinheit in der Sekundarstufe II

In der Sekundarstufe II kann die Aufzeichnung von Wegen ebenfalls in den Mathematikunterricht eingebunden werden. Dabei können dann quantitative Betrachtungen und die Modellbildung im Vordergrund stehen. Meist müssen hierfür die Rohdaten einer Aufzeichnung in ein Tabellenkalkulationsprogramm übertragen werden. Eine kurze Anleitung dazu findet sich im Anhang 2.

Eine Aufgabe, die den Lernenden einen Einblick in das Wesen von Idealisierungen ermöglicht, ist mit der App einfach zu realisieren: Mehrere Schüler sollen den gleichen Weg aufzeichnen. Bei jedem Lernenden wird jedoch zuvor in den Einstellungen der App ein anderer zeitlicher Abstand der Messpunkte festgelegt. So betragen die Zeitabstände beispielsweise 2 Sekunden, 10 Sekunden, 30 Sekunden und eine Minute. Durch den Vergleich der unterschiedlichen Weg-Zeit-Graphen können die Schüler selbst erarbeiten, dass bei idealisierten Weg-Zeit-Graphen zwischen zwei Messpunkten eine konstante Geschwindigkeit angenommen wird. Im nächsten Schritt können die Lernenden einen Graphen dann selbst idealisieren. Dazu wird ein GPS-Datensatz in das Tabellenkalkulationsprogramm geladen und anschließend mittels linearer Regression abschnittsweise bearbeitet (Engel 2010: 221ff.).
Einen weiteren Ansatzpunkt für die Auseinandersetzung mit den aufgezeichneten GPS-Datensätzen liefert die Darstellung des Geschwindigkeit-Zeit-Graphen in der App. Wie bereits in **Kapitel 3.3** erläutert nimmt das Programm hierbei eine Glättung der Daten vor. Diese kann von den Schülern nachvollzogen werden, indem die ausgelesenen Rohdaten der Geschwindigkeit durch gleitende Mittelwerte (Engel 2010: 314ff.) ebenfalls geglättet und mit der Anzeige in der App verglichen werden.
Weitere Ideen zu der Auswertung von GPS-Daten finden sich in den Veröffentlichungen von Wolfgang Riemer und auf seiner Internetseite (Riemer 2009; Riemer 2011; Riemer o.J).
Auch in der Sekundarstufe II können Stroboskopaufnahmen zur qualitativen und quantitativen Beschreibung von funktionalen Zusammenhängen genutzt werden. Voraussetzung für Berechnungen mit den Stroboskopbildern ist, dass diese vor einem entsprechenden Hintergrund, also einer Längenskala aufgenommen wurden. So können die Schüler beispielsweise aus der Stroboskopaufnahme des freien Falls von einem Ball die Beschleunigung durch die Erdanziehung ermitteln.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der Arbeit war es einen Weg aufzuzeigen, kinematisch-funktionales Denken mit dem Fokus auf Darstellungswechsel bei der Behandlung funktionaler Zusammenhänge zu fördern. Die aus dieser Zielsetzung entstandene Lerneinheit bietet einen experimentellen Zugang zu der Thematik der funktionalen Abhängigkeit, bei der qualitative Betrachtungsweisen im Vordergrund stehen.
Die Ergebnisse aus den Beobachtungen der Erprobung lassen die Schlussfolgerung zu, dass die direkte Rückmeldung in Form eines simultan entstehenden Graphen und die Erfahrung einer Bewegungssituation den Repräsentationstransfer bei der Auseinandersetzung mit den funktionalen Zusammenhängen dieser Bewegung stützen. Mit einem Nachtest wurde gezeigt, dass die Lernenden auch einige Wochen nach der Lerneinheit die funktionale Abhängigkeit der Größen Zeit, Strecke und Geschwindigkeit einer Bewegungssituation in entsprechenden Graphen richtig darstellen können. Die Lerneinheit scheint somit nachhaltig kinematisch-funktionales Denken zu fördern. Die Schülerbeschreibungen markanter Punkte im Kurvenverlauf und der Bedeutung des Anstiegs in Graphen zeigen, dass die Lerneinheit auch einen propädeutischen Zugang zur Differentialrechnung bietet.

Diese ersten Schlussfolgerungen stellen einen Ausgangspunkt für weitere Forschungsfragen dar. So ist es beispielsweise von Interesse den Einfluss der direkten körperlichen Erfahrung auf das funktionale Denken genauer zu untersuchen. Der Aspekt der direkten Rückmeldung bietet ebenfalls Anlass zu weiterführenden Forschungen. Die während der Auseinandersetzung mit Fehlinterpretationen graphischer Darstellungen aufgestellte Vermutung, dass zwischen der Vorstellungen von Schülern zum Funktions*begriff* und den Schwierigkeiten bei der Interpretation kontextbezogener graphischer Darstellungen ein Zusammenhang besteht, bietet Anlass zu einer genaueren Untersuchung.
Auch eine mögliche Weiterentwicklung der Lerneinheit ist denkbar. So kann eine computergestützte Lernumgebung mit GPS-Daten diese Lerneinheit weiterführen. Eine Realisierung, die den experimentellen Zugang mit interaktiven Visualisierungen zur qualitativen Betrachtung der Kurvenverläufe verbindet, würde neue Möglichkeiten zur Auseinandersetzung mit den Daten eröffnen. Bei einer möglichen Erweiterung der Lerneinheit auf die Sekundarstufe II steht die quantitative Betrachtung und die Modellierung mit experimentell gewonnenen Daten im Vordergrund.

Literatur

(Barzel/Ganter 2010) Barzel, B., Ganter, S.: „Experimentell zum Funktionsbegriff“, Praxis der Mathematik in der Schule 31, 2010, S. 14-19

(Brauner 2008) Brauner, U.: „Graphen gehen – Ein Gefühl für Diagramme entwickeln“, mathematik lehren (148), 2008, S. 20-23.

(Dodel/Häupler 2010) Dodel, H., Häupler, D.: „Satellitennavigation“, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2010

(Engel 2010) Engel, J.: „Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion. Eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtsstudierende“, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2010

(Führer 2009) „Verstehen oder berechnen?? Wie passt der Computer zum Analysisunterricht des 20. Jahrhunderts?“, in: Bericht über die 27. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht & Informatik“, Franzbecker Verlag, 2009, S. 7 – 41

(Hadjidemetriou/Williams 2002) Hadjidemetriou, C., Williams, J.: „Children's graphical conceptions“, Research in Mathematics Education (4), 2002, S. 69-87

(Hahn/Prediger 2008) Hahn, S., Prediger, S.: „Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis.“, Journal für Mathematikdidaktik 29 (3/4), 2008, S. 163-198.

(Hoffkamp 2011) Hoffkamp, A.: „Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen – Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse“, unveröffentlichte Dissertation, Technische Universität Berlin, 2011

(Höfer 2008) „Das Haus des funktionalen Denkens – Entwicklung und Erprobung eines Modells für die Planung und Analyse methodischer und didaktischer Konzepte zur Förderung des funktionalen Denkens“, Dissertation 2008, Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin

(Hußmann 2010) Hußmann, S.: „Veränderungen verstehen – aus qualitativer Sicht“, Praxis der Mathematik in der Schule 31, 2010, S. 4-8

(Hußmann/Leuders 2010) Hußmann, S., Leuders, T.: „Veränderung verstehen – qualitativ und diskret“, Praxis der Mathematik in der Schule 31, 2010, S. 1-3

(Janvier 1978) Janvier, C.: „The interpretation of complex cartesian graphs – Studies and teaching experiments“, PhD thesis, Shell Centre for Mathematical Education and Universite du Quebec a Montreal, University of Nottingham, 1978

(Klein 1907) „Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen“, Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts, Leipzig, Teubner 1907

(KMK 2003) Beschlüsse der Kultusministerkonferenz, „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“, Beschluss vom 04.12.2003, München: Wolters Kluwer Deutschland

(Krüger 2000a) Krüger, K.: „Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips.“, Dissertation, Logos Verlag, Berlin, 2000

(Krüger 2000b) Krüger, K.: „Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform“, Mathematische Semesterberichte 47, 2000, S. 221–241

(Pavel o.J.) Pavel, M.: „uTrack - online GPX track report generator“, Internetseite, http://www.utrack.crempa.net/ , (letzter Zugriff: 13.04.2013, 15.20 Uhr)

(Reis/Hammer 2013) Reiss, K., Hammer, C.: „Grundlagen der Mathematikdidaktik - Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe“, Reihe: „Mathematik Kompakt“, 2013, Basel, Birkhäuser Verlag,

(Riemer 2009) Riemer, W., „Dem „Navi“ auf der Spur - mit Google-Maps, Tabellenkalkulation, Analysis und Vektorrechnung“, MNU (62/8), Verlag Klaus Seeberger, Neuss, 2009, S. 468-477

(Riemer 2010) „Bewegungen mit GPS untersuchen – Grundvorstellungen der Analysis 'erfahren' “, mathematik lehren (160), 2010, S. 54 – 58

(Riemer 2011) „Modellieren im Mathematikunterricht – Im ICE von Hamm nach Bielefeld“, zur Herbsttagung von Istron, MNU und der PH Freiburg, 2011, http://www.riemer-koeln.de/mathematik/publikationen/gps/gps-ice-istron/istron-ice.pdf (letzter Zugriff: 13.04.2013, 19.16 Uhr)

(Riemer o.J.) Riemer, W.: „GPS - DAS Messgerät im MU“, Internetseite, http://www.riemer-koeln.de/joomla/index.php?option=com_wrapper&view=wrapper&Itemid=76 , (letzter Zugriff: 13.04.2013, 18.33Uhr)

(Robutti 2006) Robutti, O.: „Motion, Technology, Gestures in Interpreting Graphs.“, International Journal for Technology in Mathematics Education 13(3), 2006, S. 117-126

(SenBJS 2006a) Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin, editor. Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I, Jahrgangsstufe 7-10, Mathematik. Oktoberdruck AG, Berlin, 2006.

(SenBJS 2006b) Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin editor. Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik. Oktoberdruck AG, Berlin, 2006.

(Stellmacher 1986) Stellmacher, H.: „Die nichtquantitative Beschreibung von Funktionen durch Graphen beim Einführungsunterricht“, In: von Harten, J. (Hrsg.): „Funktionsbegriff und funktionales Denken“, IDM-Reihe, Band 11, Aulis Verlag, Köln, 1986, S. 21-34

(Swan et al. 1985) Swan, M. et al.: „The language of functions and graphs“, Shell Centre & Joint Matriculation Board, Nottingham, 1985.

(Vogel 2007) Vogel, M.: „Multimediale Unterstützung zum Lesen von Funktionsgraphen. Grundlagen, Anwendungen und empirische Untersuchung eines theoriegeleiteten Ansatzes zur Arbeit mit multiplen Repräsentationen“,mathematica didactica (30), 2007, S. 3 – 28

(Vollrath 1989) „Funktionales Denken“,in: Journal für Mathematikdidaktik 10 (1989), S. 3-37.

(Weigand 1988a) „Zur Bedeutung der Darstellungsform für das Entdecken von Funktionseigenschaften“, Journal für Mathematikdidaktik (9/88), S. 287-325

(Weigand 1988b) „Zur Bedeutung von Zeitfunktionen für den Mathematikunterricht“, Journal für Mathematikdidaktik (9/88), 1988, S. 55-86

Verwendete Programme:

„My Tracks“ download: http://www.google.com/mobile/mytracks/
„google-earth“ download: http://www.google.de/intl/de/earth/index.html

Selbstständigkeitserklärung

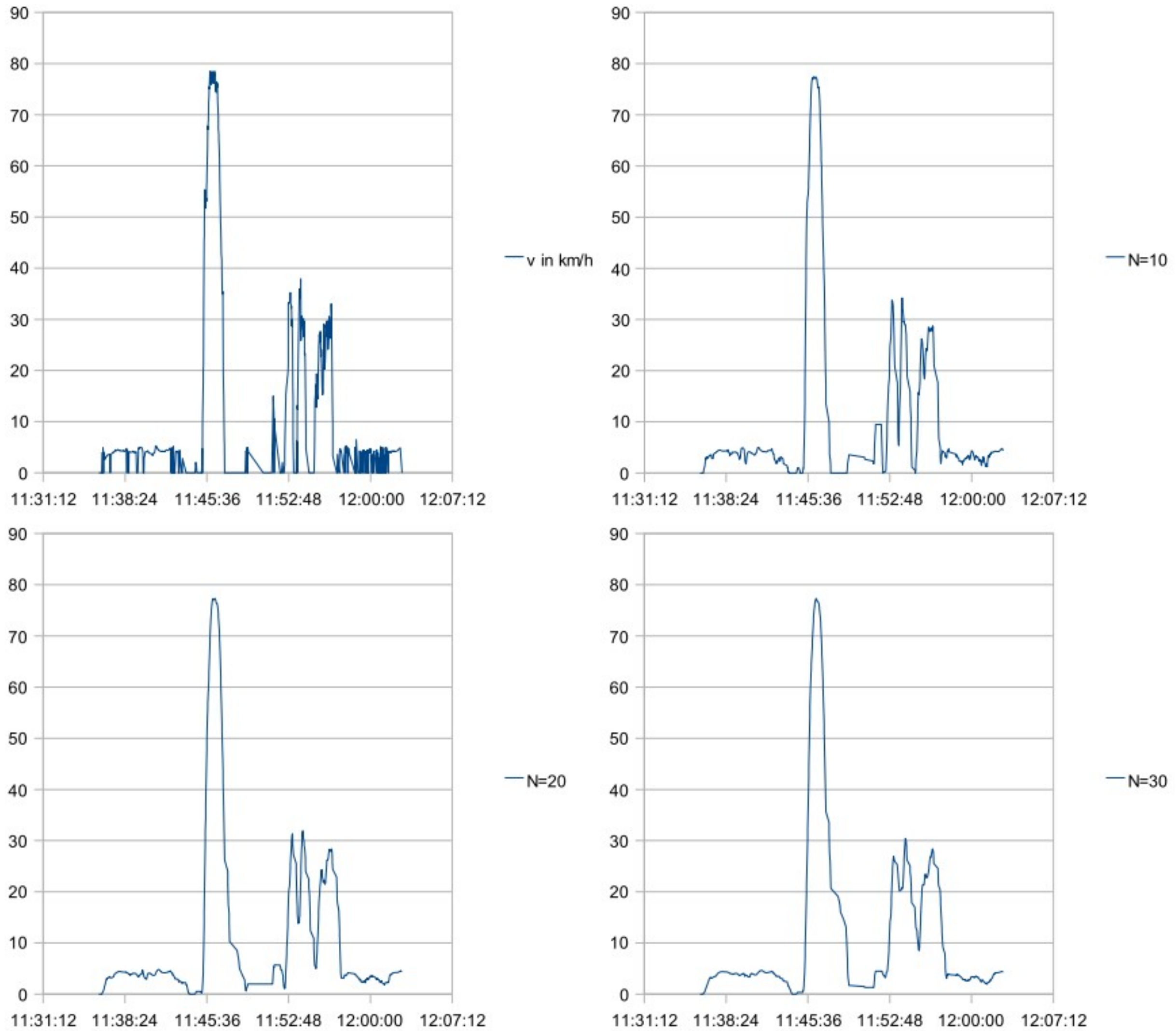
Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe und ich zum ersten Mal eine Masterarbeit in diesem Studiengang einreiche.

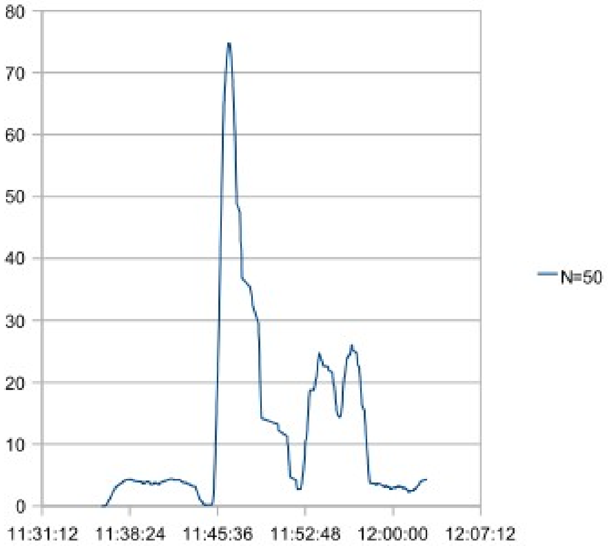
Berlin, den ________________________

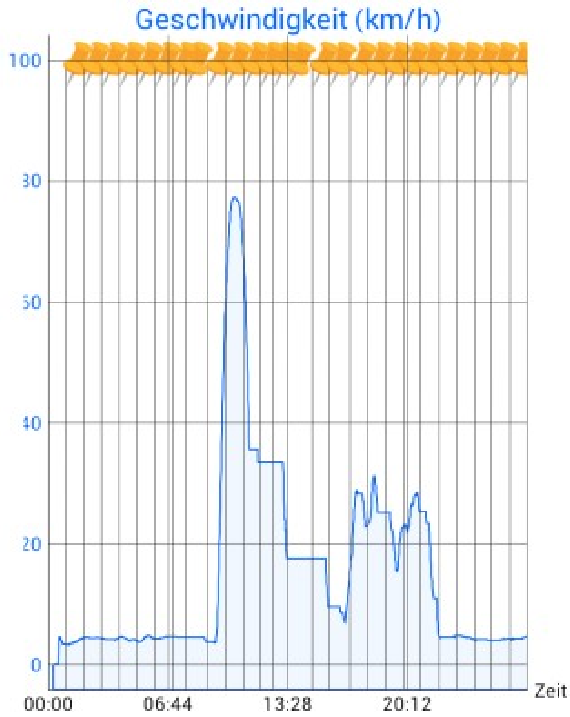
Anhang 1

Glättung eines Geschwindigkeit-Zeit-Graphen mittels gleitender Mittelwerte und Vergleich mit der Darstellung in der App „My Tracks“

Die Abbildung zeigt als erstes den Geschwindigkeit-Zeit-Graphen, der aus den Rohdaten erstellt wurde. In den darauffolgenden Abbildungen wurde mit zunehmender Fenstergröße gleitend gemittelt. Die Fenstergröße N gibt an, wieviele der Werte aus der Umgebung eines Punktes, die in die Mittelwertsrechnung eingingen. Der Datensatz umfasste insgesamt 1040 Messpunkte. Man erkennt, wie sich der Graph durch die Glättung verändert. Bei einer Glättung mit N=30 und N=50 kann eine große Ähnlichkeit zu dem Graphenverlauf in der App festgestellt werden. Die Vermutung liegt nah, dass in dem Algorithmus der App zum Glätten des Graphen über eine ähnliche Anzahl an Messpunkten gemittelt wird. Außerdem wird deutlich, dass es sich tatsächlich um die sehr simple Methode der Mittelwertbildung und um kein aufwendigeres, genaueres Verfahren zur Glättung handeln kann.




80
70
60
50
40
30
20
10
0
11:31:12
11:38:24
11:45:36
11:52:48
12:00:00
12:07:12
N=50


Geschwindigkeit (km/h)
100
40
20
0
00:00
06:44
13:28
20:12
Zeit

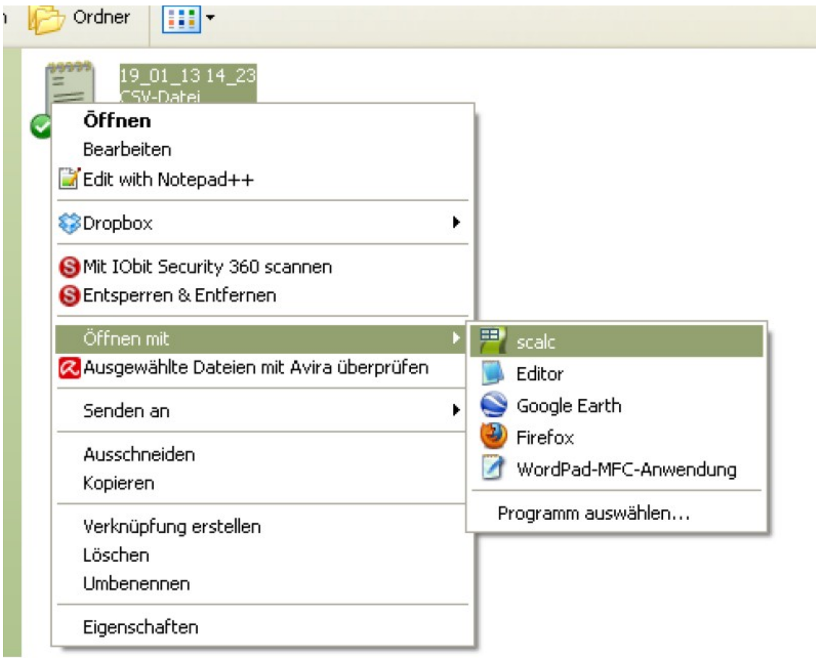
Anhang 2

Übertragen von GPS-Daten in Tabellenkalkulationsprogramme

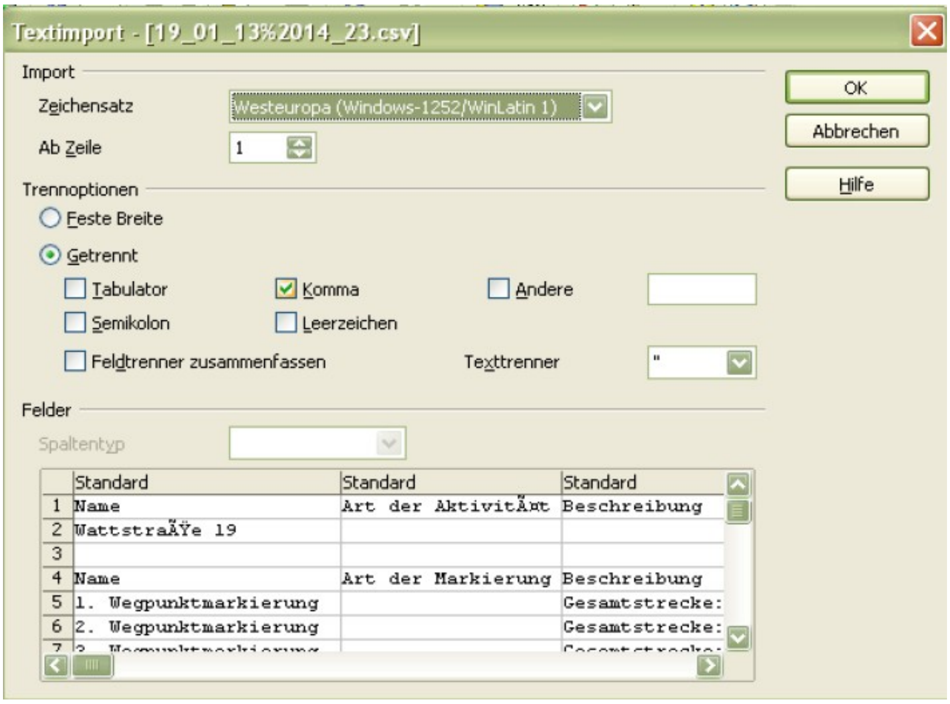
1. Speichern des Tracks im Format „.csv“.

2. Übertragen der Datei auf den Computer.

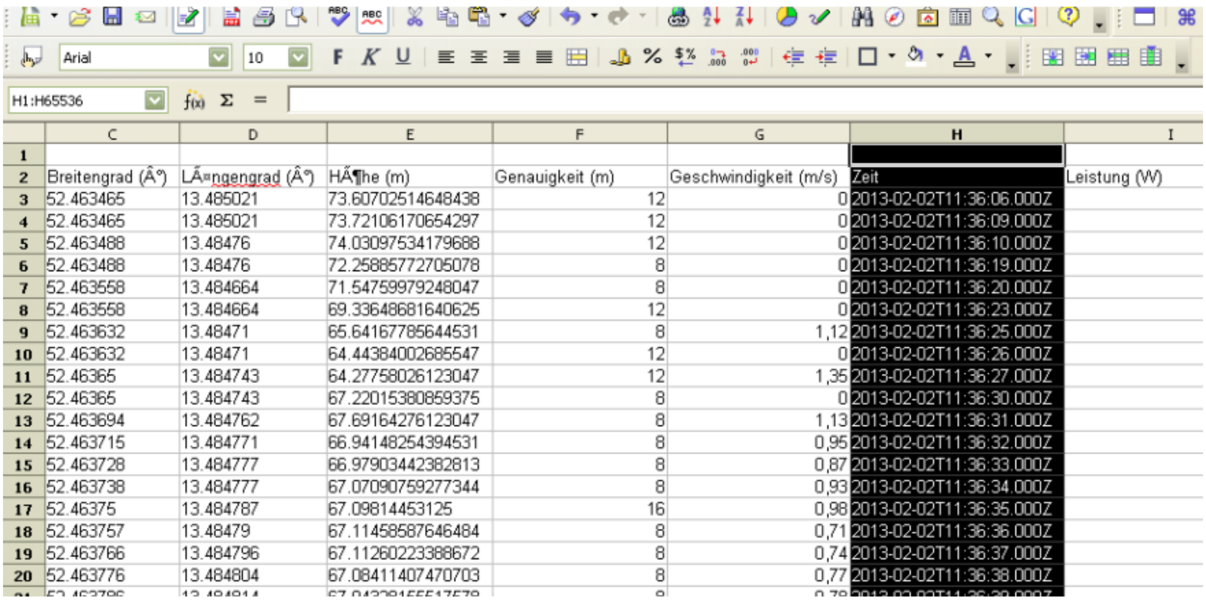
3. Öffnen der Datei.



4. Festlegung der Einstellungen für den Import.



5. Löschen unnötiger Spalten und Formatierung der Spalte „Zeit".



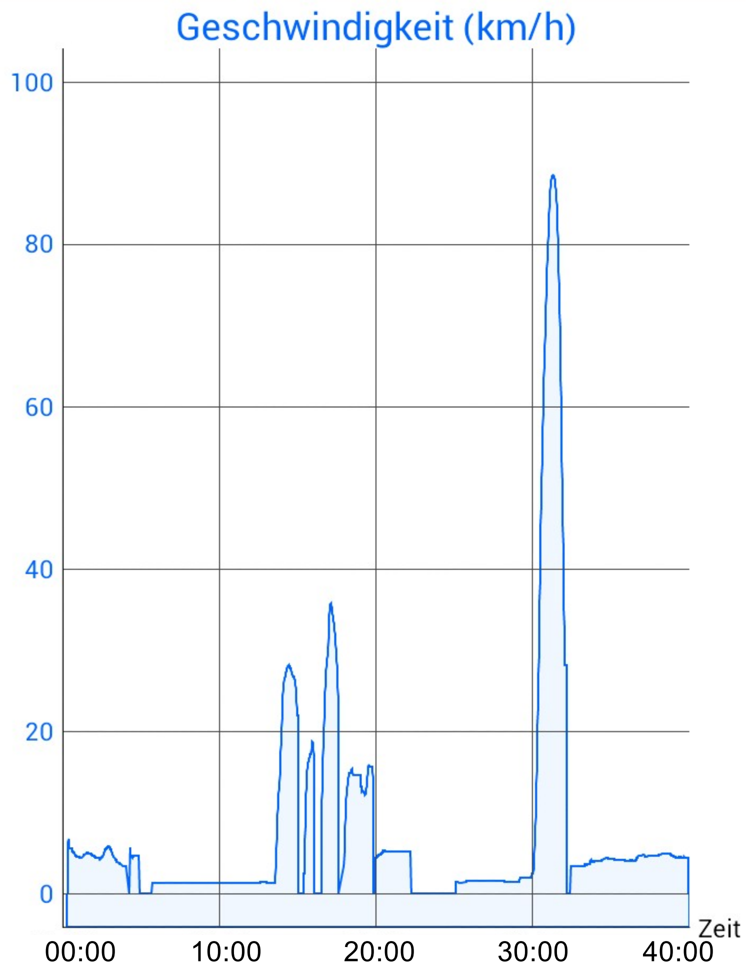
	C	D	E	F	G	H	I
1							
2	Breitengrad (Â°)	LÃ¤ngengrad (Â°)	HÃ¶he (m)	Genauigkeit (m)	Geschwindigkeit (m/s)	Zeit	Leistung (W)
3	52.463465	13.485021	73.60702514648438	12	0	2013-02-02T11:36:06.000Z	
4	52.463465	13.485021	73.72106170654297	12	0	2013-02-02T11:36:09.000Z	
5	52.463488	13.48476	74.03097534179688	12	0	2013-02-02T11:36:10.000Z	
6	52.463488	13.48476	72.25885772705078	8	0	2013-02-02T11:36:19.000Z	
7	52.463558	13.484664	71.54759979248047	8	0	2013-02-02T11:36:20.000Z	
8	52.463558	13.484664	69.33648681640625	12	0	2013-02-02T11:36:23.000Z	
9	52.463632	13.48471	65.64167785644531	8	1,12	2013-02-02T11:36:25.000Z	
10	52.463632	13.48471	64.44384002685547	12	0	2013-02-02T11:36:26.000Z	
11	52.46365	13.484743	64.27758026123047	12	1,35	2013-02-02T11:36:27.000Z	
12	52.46365	13.484743	67.22015380859375	8	0	2013-02-02T11:36:30.000Z	
13	52.463694	13.484762	67.69164276123047	8	1,13	2013-02-02T11:36:31.000Z	
14	52.463715	13.484771	66.94148254394531	8	0,95	2013-02-02T11:36:32.000Z	
15	52.463728	13.484777	66.97903442382813	8	0,87	2013-02-02T11:36:33.000Z	
16	52.463738	13.484777	67.07090759277344	8	0,93	2013-02-02T11:36:34.000Z	
17	52.46375	13.484787	67.09814453125	16	0,98	2013-02-02T11:36:35.000Z	
18	52.463757	13.48479	67.11458587646484	8	0,71	2013-02-02T11:36:36.000Z	
19	52.463766	13.484796	67.11260223388672	8	0,74	2013-02-02T11:36:37.000Z	
20	52.463776	13.484804	67.08411407470703	8	0,77	2013-02-02T11:36:38.000Z	

Anhang 3

Arbeitsblätter der Lerneinheit

Aufgabe 1

Der Geschwindigkeit-Zeit-Graph zeigt meinen Weg zur Arbeit.
Auf der Karte sind der Startpunkt und das Ziel eingezeichnet.
Beschreibe so genau wie möglich, wie ich zur Arbeit gekommen bin und zeichne den Weg in die Karte!



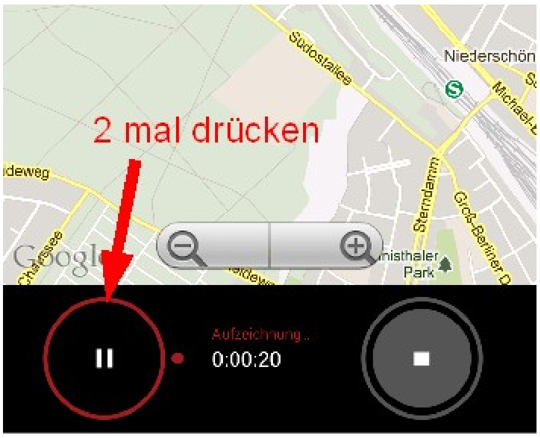
Wegbeschreibung


Start
Ziel
An der Wuhlheide
Rummelsburger Straße
Rathenaustraße
Kottmeierstraße
Plönzeile
Firlstraße
Triniusstraße
Griechische Allee
Oberschöneweide
Wilhelminenhofstraße
Zeppelinstraße
Edisonstraße
Deulstraße
Helmholtzstraße
Wattstraße
Siemensstraße
Fuststraße
Tabbertstraße
Nalepastraße
Grenzweg
Schwarzer Weg
Fritz-Kirsch-Zeile
Brückenstraße
Niederschöneweide
Fließstraße
Hainstraße
Fennstraße
Köllnische Straße
Grimaustraße
Michael-Brückner-Straße
Sterndamm
Hagedornstraße
Zentrum Schöneweide
Schnellerstraße
Rixdorfer Straße
Südostallee
Neuer Städtischer Friedhof
Treptower Tennisclub
Glanzstraße
Baumschulenstraße
Baumschulenweg
Frauenlobstraße
Rinkartstraße
Kiefholzstraße
Heidekampweg
Köpenicker Landstraße
Neue Krugallee
Sportplatz "Willi Sänger"
Eichbuschallee
Plänterwald
96
96a
1000 ft
200 m
© 2013 Google - Kartendaten © 2013 Google, GeoBasis-DE/BKG (©2009)

Auftrag Geschwindigkeit-Zeit-Graph

Wir fahren nun den Weg aus Aufgabe 1 zurück.
Wir starten also in Baumschulenweg und fahren zu mir nach Hause.
Dabei zeichnen wir den Weg mittels GPS auf.

Deine Aufgabe ist es, dabei ein Geschwindigkeit-Zeit-Graphen aufzunehmen.
Starte zu Beginn unseres Weges eine Aufzeichnung in der App „Meine Tracks" und beende sie, wenn wir am Ziel sind.
Beobachte während der Fahrt den Verlauf des Graphen.
Wenn wir an einer Haltestelle kurz stehen bleiben oder warten, drücke bitte den Pause-Knopf und sofort wieder „Start".



Auftrag Wegpunkte

Wir fahren nun den Weg aus Aufgabe 1 zurück.
Wir starten also in Baumschulenweg und fahren zu mir nach Hause.
Dabei zeichnen wir den Weg mittels GPS auf.

Deine Aufgabe ist es, Wegpunkte aufzuzeichnen.

Gehe dazu jetzt in der App „Meine Tracks“ auf:
„Einstellungen“ → „Aufzeichnung“ → „Wegpunkthäufigkeit“ → „1 min“.
Das bedeutet, dass jede Minute auf der Karte die Stelle markiert wird, an der wir uns in diesem Moment befinden.

Starte zu Beginn unseres Weges die Aufzeichnung und beende sie wenn wir am Ziel sind. Dein Handy kannst du während der Fahrt in der Tasche lassen.
Protokolliere während der Fahrt möglichst genau, wie wir uns bewegt haben.
Du kannst dabei auch den Geschwindigkeit-Zeit-Graphen auf dem Smartphone deines Mitschülers beobachten.

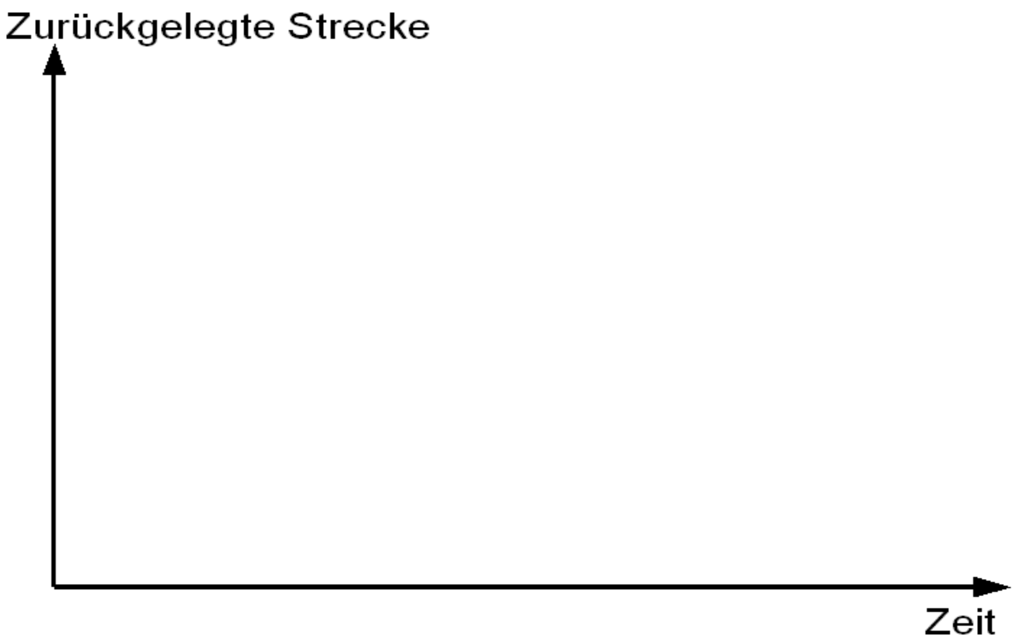
Bewegungsprotokoll: (Stichpunkte mit Zeitangabe)

Aufgabe 2a

Jetzt wollen wir unseren Weg auswerten!

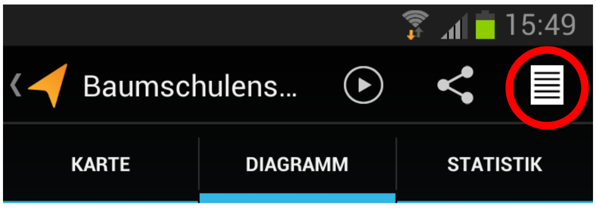
Betrachtet zunächst auf dem Handy die Karte mit den Wegpunkten.
Was kannst du erkennen? Welche Informationen darüber, wie wir uns bewegt haben, kannst du aus den Wegpunkten ablesen? Vergleicht eure Vermutungen mit dem schriftlichen Protokoll und dem Geschwindigkeit-Zeit-Graphen.

Skizziere aus deinen Überlegungen, wie der Weg-Zeit-Graph aussehen könnte.
Auch hier kann dir vielleicht der Geschwindigkeit-Zeit-Graph helfen.



Aufgabe 2b

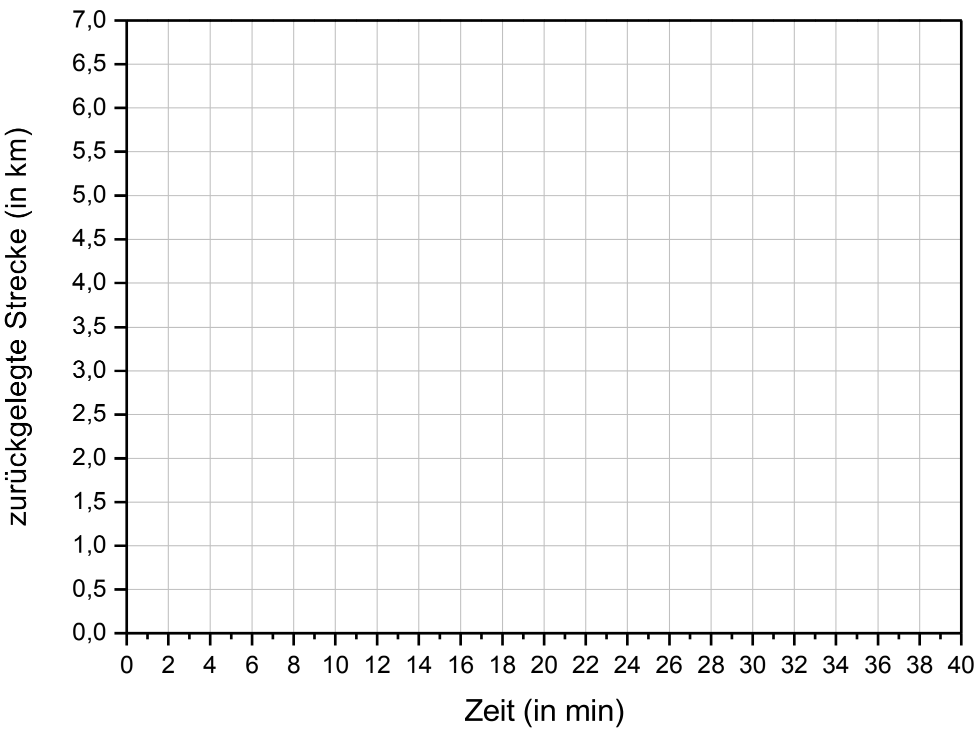
In der App kannst du dir alle Wegpunkte anzeigen lassen.



Wenn du einen Wegpunkt in der Liste auswählst, wird der Abstand zur vorherigen Markierung angezeigt.

Erstelle eine Tabelle mit den Werten der Wegpunktmarkierungen und daraus einen Weg-Zeit-Graphen.

Zeit (in min)	Abstand (in m)	Gesamtstrecke (in m)	Zurückgelegte Gesamtstrecke (in km)



Unterteile deinen Graphen in mehrere Abschnitte und gebe diesen Überschriften. Vergleiche deinen gezeichneten Graphen mit dem aufgezeichnetem Geschwindigkeit-Zeit-Graphen in der App.

Aufgabe 3

Der Weg-Zeit-Graph und die Karte zeigen meinen Weg von zu Hause zur Universität in Adlershof.

Wie weit bin ich gefahren und wie lange dauerte der gesamte Weg?

Was passiert zwischen den Punkten...

...B und C ?

...D und G ?

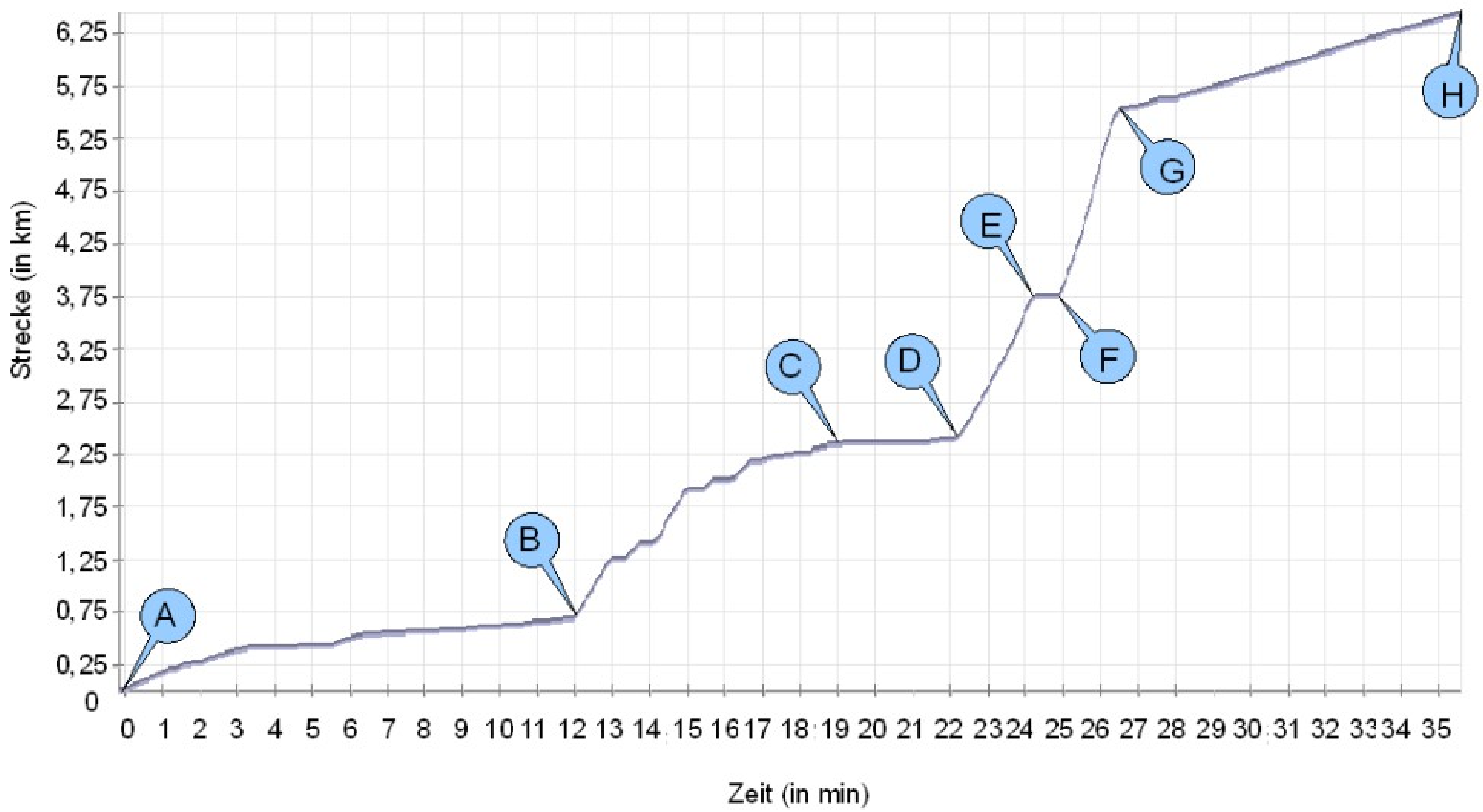
Zu welchen Zeitpunkten bewege ich mich gar nicht? Woran erkennst du das?

Wann ist meine Geschwindigkeit am größten? Woran erkennst du das?

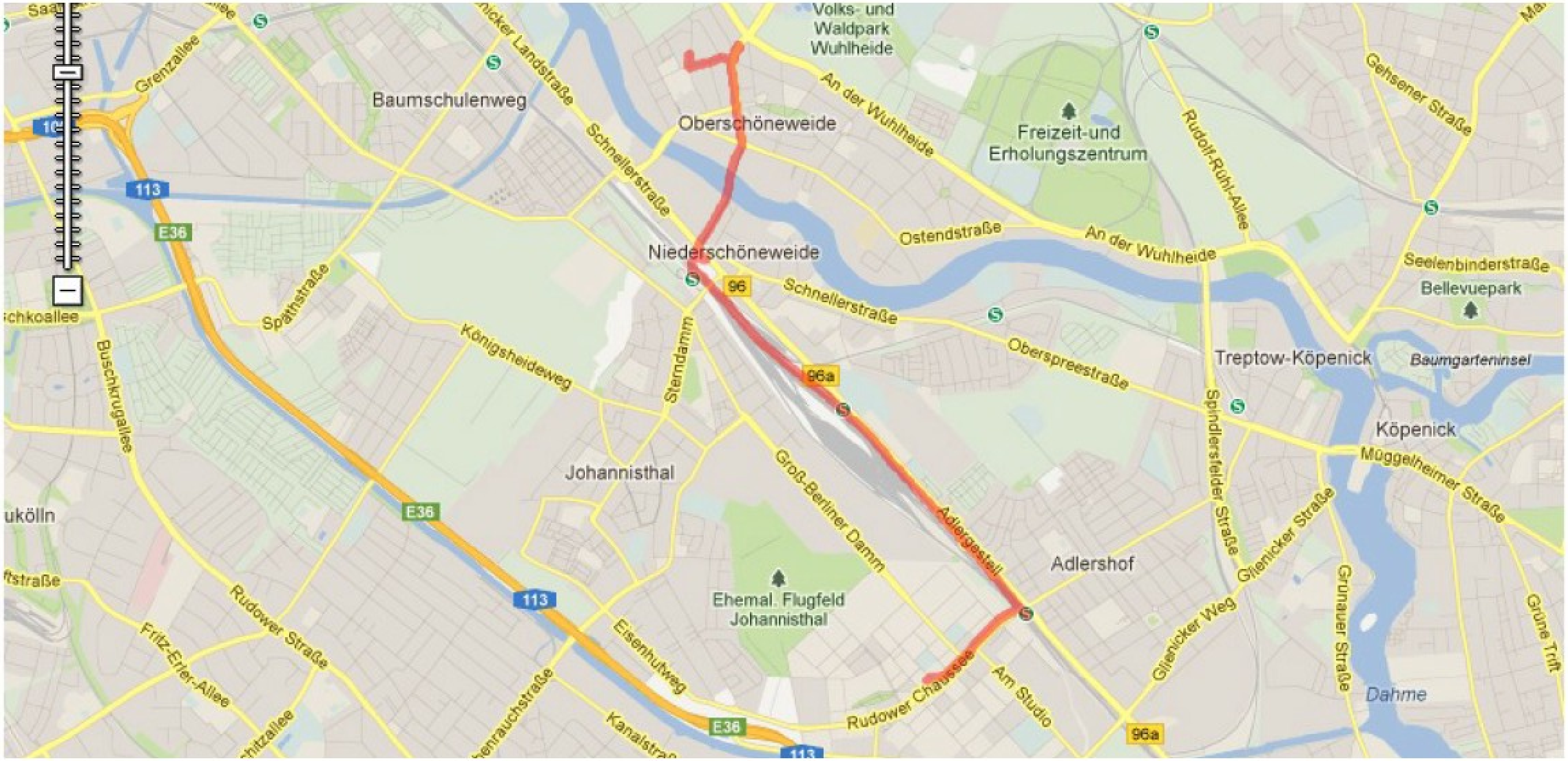
Wie groß ist meine durchschnittliche Geschwindigkeit zwischen den Punkten...

...D und E ?

...G und H ?


Strecke (in km)
6,25
5,75
5,25
4,75
4,25
3,75
3,25
2,75
2,25
1,75
1,25
0,75
0,25
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35
Zeit (in min)
A
B
C
D
E
F
G
H

Zeichne die Punkte A bis H in die Karte ein!



Anhang 4

Arbeitsblatt zum Nachtest

Aufgabe

Beschreibe in Worten deinen Schulweg und skizziere die dazugehörigen Graphen.