Modellierungskonzepte 1

Elke Warmuth

Humboldt-Universität Berlin

WS 2008/09

1. Grundlagen
   - Überblick
   - Rahmenlehrpläne

2. Lehrbuchbeispiele Wahrscheinlichkeit
   - Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit
   - LAPLACE-Wahrscheinlichkeit
   - Wahrscheinlichkeit

3. Ausgewählte Probleme
   - Was ist die Wahrscheinlichkeit
   - LAPLACE-Wahrscheinlichkeit
   - Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit
   - Schätzen einer unbekannten Wahrscheinlichkeit

Modellierungskonzepte und -werkzeuge

- Ergebnismenge, Ereignisse
- Laplace-Regel
- Wahrscheinlichkeit als stabiler Wert der rel. Häufigkeit
- Pfadregeln
- bedingte Wahrscheinlichkeit
- Unabhängigkeit
- Zufallsgrößen
- Modellklassen:
  - Binomialverteilung
  - Hypergeometrische Verteilung
  - Normalverteilung
  - ...

Klasse 1/2

Anforderungen	Inhalte
in Vorgängen der eigenen Erfahrungswelt zufällige Ereignisse finden, den Ereignissen Begriffe zuordnen	Verständnis von Wahrscheinlichkeit: ist möglich (aber nicht sicher), ist sicher, ist unmöglich

Klasse 3/4

Anforderungen	Inhalte
Versuchsreihen nutzen, um die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen einzuschätzen, Anordnungen nutzen, um die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen einzuschätzen	genauso wahrscheinlich wie, die Chance ist größer als, in 2 von 8 Fällen, kommt häufiger vor als

Klasse 5/6

Anforderungen	Inhalte
Wahrscheinlichkeit mithilfe der Bruchdarstellung angeben und vergleichen	Angabe von Wahrscheinlichkeiten in Form von Brüchen
theoretisch ermittelte Wahrscheinlichkeiten mit dazu empirisch ermittelten Häufigkeiten vergleichen	
Bedingungen von Zufallsexperimenten analysieren, verändern und Auswirkungen beschreiben und einschätzen	Veränderungen an Zufallsgeräten
	Gerechtigkeit von Spielen, Gewinnchancen

Klasse 7/8

Kompetenzen

- Beschreiben einfacher Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen
- Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei einfachen Zufallsexperimenten

Tätigkeiten

✓

- verwenden die Begriffe: Ergebnis, Ereignis und Ergebnismenge zur Beschreibung von Zufallsexperimenten,
- schätzen Wahrscheinlichkeiten durch Bestimmen relativer Häufigkeiten,
- beschreiben einfache Zufallsexperimente durch die Angabe einer angemessenen Ergebnismenge,
- begründen die Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit von Ergebnissen aufgrund von Symmetrien.

✓✓

- beschreiben Zufallsexperimente durch die Angabe einer der Problemstellung angemessenen Ergebnismenge,
- begründen das verwendete Abzählverfahren.

Klasse 9/10

Kompetenzen

- Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten
- Verwenden des Urnenmodells zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten

Tätigkeiten

✓

- beschreiben die Ergebnismenge 2- und 3-stufiger Zufallsexperimente durch Baumdiagramme,
- berechnen Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen 2- und 3-stufiger Zufallsexperimente mit der ersten Pfadregel,
- begründen die erste Pfadregel anschaulich,
- skizzieren zur Anwendung der Pfadregeln ein beschriftetes Baumdiagramm,
- führen für Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten in der Problemlösung auftauchen, nahe liegende Bezeichnungen ein.

$\checkmark\checkmark$

- beschreiben die Ergebnismenge mehrstufiger Zufallsexperimente durch Baumdiagramme,
- berechnen Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen und Ereignissen mehrstufiger Zufallsexperimente mit den Pfadregeln,
- begründen die zweite Pfadregel (Summenregel) anschaulich.

$\checkmark\checkmark\checkmark$

- schätzen Wahrscheinlichkeiten aufgrund von Simulationen,
- modellieren mehrstufige Zufallsexperimente, die auf jeder Stufe zwei Ausgänge haben.

Einführungsphase (bei 13-jähriger Schulzeit)

Im 1. Halbjahr des Fundamentalbereichs Stochastik mit den Inhalten Beschreibende Statistik, LAPLACE-Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramme und Pfadregeln. Außerdem im 1. Halbjahr Koordinatengeometrie und Funktionen.

Eingangsvoraussetzungen zur Qualifikationsphase

- wenden das empirische Gesetz der großen Zahlen an,
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von LAPLACE-Regel, Baumdiagrammen sowie Pfadregeln und wenden diese an,
- nutzen Wahrscheinlichkeiten zum Vorhersagen von Häufigkeiten,
- nutzen Binomialverteilung (Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung), BERNOULLI-Ketten, Binomialkoeffizienten und Fakultäten zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in Anwendungskontexten (?).

Qualifikationsphase: Inhalte Grundkurse

ma-2

- Zufallsexperimente, Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten
- Binomialverteilung (Formel von BERNOULLI)

ma-4

- Binomialverteilung (Schwerpunkt: tabellarische Darstellung)

Qualifikationsphase: Inhalte Leistungskurse

Ma-2

- Zufallsexperimente, Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten
- bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit, Satz von Bayes
- Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung (Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung)
- Binomialverteilung (Formel von Bernoulli, Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung)

Ma-4

- Normalverteilung als Grenzfall einer Binomialverteilung

Abschlussorientierte Standards für Leitidee: Daten und Zufall

<table>
<tr><th>Grundkursfach</th><th>Leistungskursfach</th></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler

• wenden kombinatorische Hilfsmittel, Urnenmodelle, Baumdiagramme und Vierfeldertafeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in realen Kontexten an,</td></tr>
<tr><td>• beschreiben reale Situationen durch binomiale Modelle unter Nutzung der Formel von BERNOULLI.</td><td>• nutzen den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit zur Beschreibung von Zufallsexperimenten,

• beschreiben reale Situationen durch binomiale Modelle unter Nutzung der Formel von BERNOULLI,</td></tr>
</table>

Grundkursfach	Leistungskursfach
	• charakterisieren Zufallsexperimente mit Hilfe von Zufallsgrößen,
	• beschreiben Binomialverteilungen durch Kenngrößen, • nutzen Erwartungswerte zum Überprüfen von Vorhersagen.

Wahrscheinlichkeitsbegriff im Stochastikunterricht

H. Freudenthal: "Natürlich fange ich nicht damit an, den Studenten zu erzählen, was Wahrscheinlichkeit ist. Es gibt nicht das geringste Bedürfnis dafür, ebenso wenig wie man im Anfang der Geometrie jemandem zu erzählen braucht, was ein Punkt ist."

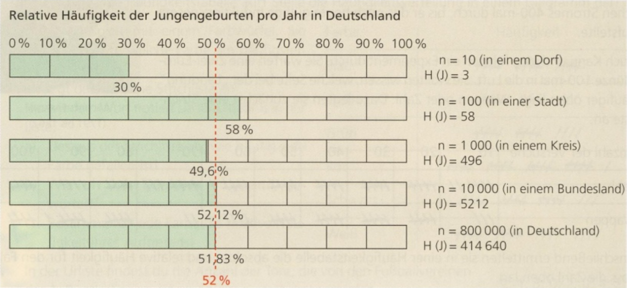
Quelle: H. Freudenthal: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 2, Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1973, S. 536

Zwei bevorzugte Einstiege:

- über relative Häufigkeiten
- über Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Wird ein Zufallsversuch sehr oft durchgeführt, so lässt sich feststellen: Die relativen Häufigkeiten für das Eintreten eines Ereignisses schwanken um eine feste Zahl. Diese feste Zahl wird die **Wahrscheinlichkeit** des Eintretens des Ereignisses E genannt und entweder als Bruch oder in Prozent angegeben.

Beispiel:
In der Bundesrepublik Deutschland werden in einem Jahr mehr Jungen als Mädchen geboren.



Die relative Häufigkeit eines Ereignisses E in einem Zufallsexperiment stellt einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses dar. Je größer die Anzahl der Wiederholungen des Experimentes ist, desto geringer schwankt die relative Häufigkeit um die Wahrscheinlichkeit.

Quelle: Mathematik, Lehrbuch für die Klasse 8 Realschule/Gesamtschule Brandenburg, Paetec, 2003, S. 188

Hier

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe
- Wahrscheinlichkeit gebunden an beliebige Wiederholbarkeit des Vorgangs
- Wiederholbarkeit als Bestandteil der Definition eines Zufallsexperiments
- Wahrscheinlichkeitsrechnung als Mathematik der Massenerscheinungen
- unnötige Einschränkung

Beim Glücksrad Fig. 1 wird der Zeiger gedreht. Es hängt vom Zufall ab, wo er stehen bleibt. Es können die **Ereignisse** „blau", „gelb" und „grün" auftreten. Da die Hälfte der Kreisscheibe blau ist, erwartet man bei Wiederholungen dieses **Zufallsversuchs** etwa bei der Hälfte aller Drehungen das **Ergebnis** „blau". Für die Ergebnisse „gelb" und „grün" erwartet man jeweils den Anteil $\frac{1}{4}$, also etwa in ein Viertel der Drehungen.
Man sagt: Die **Wahrscheinlichkeit** für „blau" beträgt $\frac{1}{2}$ und die Wahrscheinlichkeit für „gelb" und „grün" jeweils $\frac{1}{4}$. Bei 200 Drehungen erwartet man, dass das Ergebnis „blau" etwa 100-mal und die Ergebnisse „gelb" und „grün" je etwa 50-mal auftreten.
Die nebenstehende Tabelle zeigt die Ergebnisse einer solchen Versuchsreihe. Die **beobachteten Häufigkeiten** stimmen hier fast mit den **erwarteten Häufigkeiten** überein.

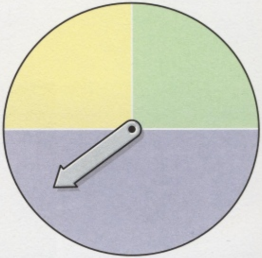


Fig. 1

Farbe	blau	gelb	grün
erwarteter Anteil	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Bei 200 Versuchen:

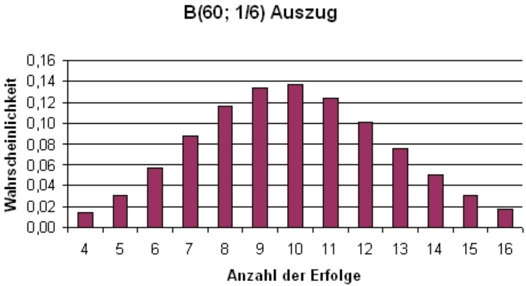
Farbe	blau	gelb	grün
erwartete Häufigkeit	100	50	50
beobachtete Häufigkeit	107	38	55

Quelle: Lambacher Schweizer 8, Mathematik für Gymnasien, Ausgabe A, Ernst Klett Verlag, 2007, S. 182

Die Wahrscheinlichkeit gibt an, welchen Anteil man für ein bestimmtes Ergebnis bei vielen Wiederholungen eines Zufallsversuchs erwartet.
Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Spielwürfel eine „2" zu würfeln, beträgt $\frac{1}{6}$.
Wenn man 60-mal würfelt, erwartet man etwa 10-mal eine „2".

Quelle: Lambacher Schweizer 8, Mathematik für Gymnasien, Ausgabe A, Ernst Klett Verlag, 2007, S. 182

Was heißt: „erwartet man?"



Sorgfalt bei der Verwendung von Begriffen

- Ergebnis – die vom Beobachter/Modellierer gewählte „feinste“ Beschreibung dessen, was beim Zufallsexperiment beobachtet wird
  durch Beispiele einführen
- Ergebnismenge – Menge aller (theoret.) möglichen Ergebnisse bei der gewählten Beschreibung
- Ereignis
  - Zusammenfassung mehrerer Ergebnisse – günstige Ergebnisse
  - Aussage über das Ergebnis – Menge aller Ergebnisse, für die die Aussage zutrifft
  - Teilmenge der Ergebnismenge

durch Beispiele illustrieren und festigen

Beispiel
Beim Würfeln mit dem Würfel (Fig. 1) gilt als Ergebnis die obere Augenzahl.
a) Wie wahrscheinlich ist das Ergebnis „1“?
b) Berechne auch die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Augenzahlen.
c) Wie oft wird die „1“ bei 900 Würfeln auftreten?
Lösung:
Da der Würfel regelmäßig gebaut ist, haben alle sechs Seiten die gleiche Chance.
a) Die Wahrscheinlichkeit für die „1“ beträgt $\frac{1}{6} \approx 16{,}67\%$.
b) Die Wahrscheinlichkeit für jede Augenzahl, also auch für die Ereignisse „2“, „3“, „4“, „5“ und „6“ beträgt $\frac{1}{6} \approx 16{,}67\%$.
c) $900 \cdot \frac{1}{6} = 150$. Man erwartet, dass bei 900 Würfen etwa 150-mal die „1“ vorkommt.


Fig. 1

*Haben alle **Ereignisse** die gleiche Wahrscheinlichkeit, spricht man von einem **Laplace-Ereignis**.*

Quelle: Lambacher Schweizer 8, Mathematik für Gymnasien, Ausgabe A, Ernst Klett Verlag, 2007, S. 183

- Man spricht nicht von Laplace-Ereignissen
- Modell: Ergebnissen werden Wahrscheinlichkeiten zugeordnet
  Modell kann Laplace-Modell sein

Bei Zufallsversuchen muss man sehr sorgfältig zwischen Ausgang und Ereignis unterscheiden. Würfelt man mit zwei Würfeln, so tritt das Ereignis „Eine Fünf wird geworfen" dann ein, wenn einer der Ausgänge $(1,4)$; $(2,3)$; $(3,2)$ oder $(4,1)$ eintritt.

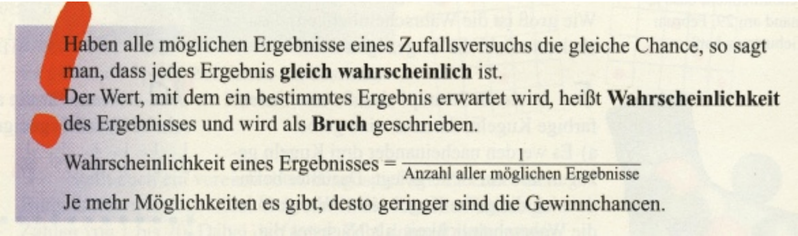
Für Zufallsversuche, bei denen alle Ausgänge gleichberechtigt sind, kann man die **Wahrscheinlichkeit**, mit der ein bestimmtes Ereignis auftritt, berechnen:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}$$

Bemerkung: Bei einer großen Anzahl von Versuchen nähert sich die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit an. Ist dies nicht der Fall, dann liegt der Verdacht nahe, dass die Ausgänge des Zufallsexperimentes nicht gleichberechtigt sind. Dies ist ein praktisches Mittel, um Manipulationen an Würfeln, Glücksrädern und anderen Zufallsgeräten auf die Spur zu kommen.

Quelle: Schnittpunkt 7, Mathematik für Realschulen Nordrhein-Westfalen, Ernst Klett Verlag, 2004, S. 198

- Ereignis „**Augensumme** 5 wird geworfen“
- Gleichberechtigt in Bezug worauf?
- Warum sind die Ausgänge gleichberechtigt?
  Modellannahme
- Relative Häufigkeit stabilisiert sich auch, wenn die Ausgänge nicht gleichwahrscheinlich sind.



Haben alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsversuchs die gleiche Chance, so sagt man, dass jedes Ergebnis **gleich wahrscheinlich** ist.
Der Wert, mit dem ein bestimmtes Ergebnis erwartet wird, heißt **Wahrscheinlichkeit** des Ergebnisses und wird als **Bruch** geschrieben.

$$\text{Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses} = \frac{1}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Je mehr Möglichkeiten es gibt, desto geringer sind die Gewinnchancen.

Quelle: mathe live 6, Mathematik für Sekundarstufe I, Ernst Klett Verlag, 1999

- Woher weiß ich, dass alle die gleiche Chance haben?
- Wiederum Wahrscheinlichkeit als physikalische Eigenschaft des Zufallsgerätes
- Was heißt „erwartet wird“?

Zwei diskussionswürdige Aufgaben:

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand am 29. Februar Geburtstag hat?
- Aus einem Strumpf mit farbigen Kugeln wird 580-mal eine Kugel gezogen und wieder zurückgelegt.
  Dabei wird 263-mal eine rote, 57-mal eine blaue, 61-mal eine gelbe und 199-mal eine weiße Kugel gezogen.
  - Welche Farbe ist wahrscheinlich am häufigsten vertreten?
  - Welche Farben sind wahrscheinlich gleich oft vertreten?
  - Könnte es auch noch schwarze Kugeln im Strumpf geben?

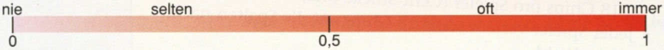
Ein etwas anderer Zugang

Basiswissen

Wenn man z. B. zwei Würfel wirft und registriert, welche Differenz der Augenzahlen auftritt, dann führt man ein Zufallsexperiment aus. Die jeweilige Differenz ist das Ergebnis des Zufallsversuches.

Bei einem **Zufallsexperiment** kann es verschiedene Ergebnisse geben.
Die Ergebnisse können mit unterschiedlicher **Wahrscheinlichkeit** auftreten.
Wir geben die Wahrscheinlichkeit durch eine Zahl zwischen 0 und 1 an. Je größer die Zahl ist, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit.

Die Wahrscheinlichkeit für „rot" ist größer als die für „gelb".



Quelle: Mathematik Neue Wege 8, Berlin, Arbeitsbuch für Gymnasien, Schroedel, 2007

Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

Wiederholen wir ein Zufallsexperiment häufig, so können wir die **relative Häufigkeit**, mit der ein Ergebnis eintritt, berechnen.

Die relative Häufigkeit ist ein **Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit**, mit der das betreffende Ergebnis eintritt.
Statt Schätzwert sagen wir auch: „**empirische Wahrscheinlichkeit**“.

Experiment:
– 30 Würfe mit 2 Würfeln,
– die Differenz 3 tritt 7-mal auf
– die relative Häufigkeit der 3 beträgt $\frac{7}{30}$.

Empirisch: aus einem Experiment gewonnen.

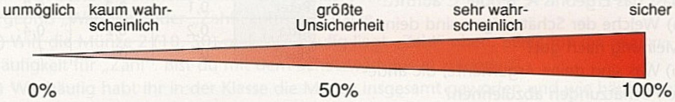
Quelle: Mathematik Neue Wege 8, Berlin, Arbeitsbuch für Gymnasien, Schroedel, 2007

häufig – 100-mal und mehr

Basiswissen

Ob man etwas tut, hängt ab von
– den möglichen Folgen des Tuns und
– der Wahrscheinlichkeit, mit der diese Folgen eintreten.

Die Wahrscheinlichkeit wird in Prozent angegeben.



Wie groß die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten des erwünschten oder nicht erwünschten Ereignisses ist,

- glauben wir zu wissen, weil wir ein Gefühl dafür haben,
- schätzen wir mit unserer Erfahrung,
- schätzen wir durch Ausprobieren und Berechnen der relativen Häufigkeit.

Quelle: Mathematik Neue Wege 8, Berlin, Arbeitsbuch für Gymnasien, Schroedel, 2007

Was ist die Wahrscheinlichkeit?

- Gegenstand: Vorgänge mit zufälligem Ergebnis.
  Unwichtig, ob Ergebnis noch nicht oder prinzipiell nicht vorhersagbar
- Standpunkt der distanzierten Rationalität:

  Der Mensch tritt der Realität mit Entwürfen des Verstandes in Form von Modellen, Hypothesen, Definitionen, Folgerungen, ... „aus der Distanz“ in der Weise partiellen, vorläufigen, approximativen Wissens gegenüber.

Quelle: D.W. Müller (Math. phys. Semesterber. NF 21 (1974) 164-169, zit. nach H. Dinges/H. Rost: Prinzipien der Stochastik, Stuttgart: Teubner, 1982, S. 262)

Sachebene:	Wahrscheinlichkeit verstanden als Grad für die Gewissheit über das Eintreten von Ereignissen in einer Skala von 0 bis 100% bzw. von 0 bis 1. Entspricht umgangssprachlichem Verständnis.
Entwurfsebene:	Wahrscheinlichkeiten als Größen im Rahmen eines Modells $\longrightarrow$ Axiome, die Intuitionen und Erfahrungen widerspiegelnd

Aufgabenstellung:

Der deutsche Basketball-Profi Dirk Nowitzki spielt in der amerikanischen Profiliga NBA beim Club Dallas Mavericks. In der Saison 2006/2007 erzielte er bei Freiwürfen eine Trefferquote von 90,4 %.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er*
   (1) *genau 8 Treffer bei 10 Versuchen erzielt,*
   (2) *höchstens 8 Treffer bei 10 Versuchen erzielt,*
   (3) *höchstens vier Mal nacheinander bei Freiwürfen erfolgreich ist.* (12 Punkte)

b) Bei Heimspielen hatte er eine Freiwurfbilanz von 267 Treffern bei 288 Versuchen, bei Auswärtsspielen lag die Quote bei 231:263. Ein Sportreporter berichtet, dass Dirk Nowitzki auswärts eine deutlich schwächere Freiwurfquote habe.

   Untersuchen Sie auf einem Signifikanzniveau von 5 %, ob die Trefferanzahl bei Auswärtsspielen

Quelle: www.stat-math.uni-essen.de, 27.11.2008, 13.20 Uhr

Abituraufgabe 2008 in Nordrhein-Westfalen, Mathematik Leistungskurs

- 90,4% gehört in Beobachtungsebene.
- $0,904 = \frac{498}{551}$. Einzig sinnvolle Rundung wäre 90%.
- Aufgabenteil a) gehört in die Modellebene. Das Modell ist zunächst nicht klar.
- Lösung des Ministeriums: „Die Zufallsvariable X für die Anzahl der Treffer bei 10 Versuchen ist $B_{10;0,904}$-verteilt.“
- Sind das die Modellierungskompetenzen, die wir anstreben?
- Ist das eine anwendungsbezogene Aufgabe?

Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- $P(A) \geq 0$ — Nichtnegativität
- $P(\Omega) = 1$ — Normiertheit
- Für paarweise unvereinbare Ereignisse (A_k) gilt $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$ — σ-Additivität

- Axiome sagen nicht, was die Wahrscheinlichkeit ist. Für das Rechnen gleichgültig, was man sich unter Wahrscheinlichkeit vorstellt.
- **Aber**: Für die Anwendung und den Lernprozess – Verbindung von Modellebene und Sachebene durch Interpretationen von Wahrscheinlichkeit notwendig

A. N. Kolmogorow in §2 Das Verhältnis zur Erfahrungswelt:

Den Ereignissen A werden Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ zugeordnet mit folgenden Eigenschaften:

I. Man kann praktisch sicher sein, dass bei einer großen Anzahl von Wiederholungen des Vorgangs die relative Häufigkeit von A sich nur wenig von $P(A)$ unterscheiden wird.
II. Wenn $P(A)$ sehr klein ist, dann kann man praktisch sicher sein, dass A bei einmaliger Beobachtung des Vorgangs nicht eintreten wird.

I. Empirisches Gesetz der großen Zahl:

Viele reale Erscheinungen weisen *statistische Regelmäßigkeit* auf, *Erfahrungstatsache* – nicht beweisbar

Mathematisches Gesetz der großen Zahl liefert Erklärungsrahmen für empirisches Gesetz der großen Zahl.

Wahrscheinlichkeit als stabiler Wert der relativen Häufigkeit: weit verbreitete Interpretation, sagt nichts über den Einzelversuch.

II. Hintergrund für statistische Schlüsse:

Es ist etwas eingetreten, das im zugrunde liegenden Modell (unter der zugrunde liegenden Hypothese) eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit hat. Daran glaube ich nicht, also verwerfe ich das Modell (die Hypothese).

Bsp. Signifikanztest oder Konfidenzintervall

II. wird leider in der Regel nicht thematisiert.

Wahrscheinlichkeitsbegriff im Stochastikunterricht

- intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff unterstellen
- durch Konzepte wie Häufigkeitsinterpretation und Laplace-Modell ausgestalten
- Modellcharakter beachten, Sachebene und Modellebene unterscheiden
- in Modellen Wahrscheinlichkeiten berechnen, interpretieren, Eigenschaften untersuchen
- Resultate von Rechnungen bestätigen die Intuition oder geben Anlass, sie zu überprüfen
- Wahrscheinlichkeitsbegriff immer weiter anreichern durch Pfadregeln, Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Modell:

- endliche Ergebnismenge
- alle Ergebnisse werden als „gleichwahrscheinlich“ angenommen.
  (Es ist leichter zu vergleichen als zu messen.)

Annahme z.B.

- wegen Symmetrieüberlegungen
- als Vereinfachung – z.B. Junge/Mädchen.

Konzept setzt Vorstellung von „gleichwahrscheinlich“ voraus und liefert Berechnungsvorschrift für Wahrscheinlichkeiten unter dieser Annnahme.

Gesamtwahrscheinlichkeit 1 oder 100% auf r mögliche gleichwahrscheinliche Ergebnisse verteilen

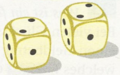
$\Rightarrow$ Jedes einzelne Ergebnis bekommt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{r}$.
$\Rightarrow$ (Additivität einer Wahrscheinlichkeitsverteilung)

für jedes Ereignis A:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Laplace-Annahme muss verstanden werden – Beispiele und Gegenbeispiele wichtig

22 Ein besonders „schönes" Ergebnis beim Würfeln mit zwei Würfeln ist ein Pasch. Kommt dieses Ereignis häufig vor? In Inges Klasse wird heftig diskutiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch?



Lisas Vorschlag: „Beim Wurf mit zwei Würfeln gibt es 21 verschiedene Ergebnisse. Es gibt 6 verschiedene Paschs. Also ist die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch $\frac{6}{21} = 28{,}6\,\%$."

(1|1); (1|2); (1|3); (1|4); (1|5); (1|6);
(2|2); (2|3); (2|4); (2|5); (2|6);
(3|3); (3|4); (3|5); (3|6);
(4|4); (4|5); (5|6);
(5|5); (5|6);
(6|6).

Peter: „Das geht doch viel einfacher. Man erzielt eine Pasch oder keinen Pasch. Also ist die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch $\frac{1}{2} = 50\,\%$."

Nicole: „Ganz so einfach ist das auch nicht. Beim Würfeln mit zwei Würfel erzielt man keine Sechs, eine Sechs oder zwei Sechsen. Es gibt also 3 verschiedene Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit für einen Sechserpasch ist somit $\frac{1}{3}$. Bei allen anderen Paschs ist das genauso. Damit ist die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch 33,3 %."

Toni hat einen ganz anderen Vorschlag: „Es gibt 36 verschiedene Ergebnisse. Darunter sind 6 Paschs. Die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch ist $\frac{6}{36} = 16{,}7\,\%$."

(1|1); (1|2); (1|3); (1|4); (1|5); (1|6);
(2|1); (2|2); (2|3); (2|4); (2|5); (2|6);
(3|1); (3|2); (3|3); (3|4); (3|5); (3|6);
(4|1); (4|2); (4|3); (4|4); (4|5); (4|6);
(5|1); (5|2); (5|3); (5|4); (5|5); (5|6);
(6|1); (6|2); (6|3); (6|4); (6|5); (6|6).

Quelle: Mathematik Neue Wege 8, Berlin, Arbeitsbuch für Gymnasien, Schroedel, 2007

Beispiel: d'Alemberts Irrtum

Eine Münze wird zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einmal Wappen erscheint?

„Lösung" von d'Alembert (1717-1783) – französischer Philosoph, Mathematiker und Literat:

Der erste Wurf bringt sicher Wappen oder Zahl. Nur im Fall Zahl ist ein zweiter Wurf überhaupt nötig. Er bringt entweder Wappen oder Zahl. Von den drei Fällen sind zwei günstig. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{2}{3}$.

Aufgabe:
Zeichne für den zweifachen Münzwurf ein Baumdiagramm.
Welche Ergebnisse gibt es beim zweifachen Münzwurf und welche Wahrscheinlichkeit haben sie?
Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Es fällt mindestens einmal Wappen."
Wo steckt der Fehler bei d'Alembert?

d'Alembert:	Ergebnismenge $\Omega = \{W, ZW, ZZ\}$ Ergebnisse nicht gleichwahrscheinlich (warum?)
Baumdiagramm:	Ergebnismenge $\Omega = \{WW, WZ, ZW, ZZ\}$ Ergebnisse (= Pfade) gleichwahrscheinlich wegen Symmetrie.

Baumdiagramm hilft zu strukturieren.

Probleme mit dem Demonstrieren des empirischen Gesetzes der großen Zahlen

(Empirisches) Gesetz der großen Zahl(en)

Die Erfahrung zeigt: Nach einer großen Zahl von Versuchen ändert sich die relative Häufigkeit durch weitere Versuche nur noch wenig.

...

Die relative Häufigkeit nach einer großen Zahl von Beobachtungen ist ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

Probleme mit dem Stabilwerden gut kennen, bevor man Experimente macht/machen lässt

Immer mehrere hinreichend lange Serien, um

- nicht Konvergenz im üblichen Sinne zu suggerieren,
- die Schwankungen der Serien untereinander zu zeigen,
- das Stabilisieren auf den gleichen Wert anzudeuten,
- mehrere gleichartige Serien zu einer mit besonders großem Stichprobenumfang zusammenfassen zu können.

verschiedene Würfel bedeuten (streng genommen) verschiedene Experimente.

Demonstration niemals als Selbstzweck, sondern um eine unbekannte Wahrscheinlichkeit zu schätzen, vgl. Simulation.

H. FREUDENTHAL: „Ein heutzutage viel abgeschriebenes Beispiel ist auch das Werfen eines Reißnagels. Ich weiß nicht, ob die Verfasser, die es empfehlen, es auch ausprobiert haben. Ich versuchte es einmal, aber nach einigen Versuchen und ein bißchen Nachdenken wurde mir klar, daß das Experiment von zu vielen und unbeherrschbaren Faktoren abhängt, um aufschlußreiche Resultate zu liefern. Es hängt da viel von der Art des Werfens ab und auf die Dauer wird sogar ein fester Experimentator in seiner Wurftätigkeit Schwankungen zeigen. Es ist übrigens kaum nötig, darauf hinzuweisen, daß dieses Zufallsexperiment selber kaum motiviert und als Idee höchst naiv ist.“

Quelle: H. Freudenthal: Der Wahrscheinlichkeitsbegriff als angewandte Mathematik. In: Les applications nouvelles de mathematiques et de l'Enseignement secondaire, Bericht des 3. CIEM-Seminars in Echternach, 1973, Luxemburg, 1975, 15-27 (zitiert nach g. v. Harten; H. Steinbring: Stochastik in der Sekundarstufe I, Köln: Aulis Verlag Deubner & Co KG, 1984)

Schätzen einer unbekannten Wahrscheinlichkeit

Im Rahmenplan in Klasse 7/8 verlangt, aber ohne Quantifizierung.

Hintergrundwissen:

Ereignis A – Erfolg, z.B. A – Ziehen einer roten Kugel, Ziehen eines A-Wählers

$P(A) = p$ unbekannt, z.B. Anteil der roten Kugeln, Anteil der A-Wähler

X_n – Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Beobachtungen des Vorgangs

Modell für das Schätzen

- $X_n \sim B(n, p)$
  (auch bei (relativ kleinen) Stichproben ohne Zurücklegen aus großen Grundgesamtheiten!)
- $h_n = \frac{X_n}{n}$ – relative Häufigkeit von A bei n Versuchen
- h_n dient als Schätzwert für das unbekannte p.

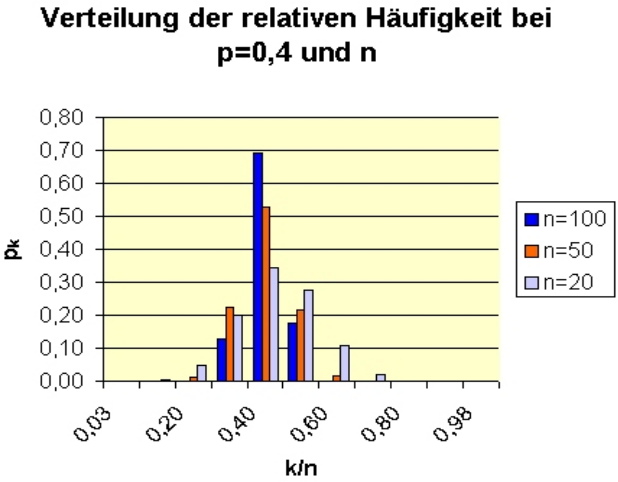
Studieren Verteilung von h_n in Abhängigkeit von n bei festem (zunächst bekannten) p.
Untersuchen im Modell Eigenschaften der Schätzgröße

Verteilung der relativen Häufigkeit (Modell)

$$P\left(h_n = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Wählen $p = 0,4$ und $n = 20, 50$ und 100.

Klasseneinteilung:
$[0; 0,05), [0,05; 0,15), [0,15; 0,25), \ldots, [0,85; 0,95), [0,95; 1]$
„Zusammenziehen“ der Verteilung auf den Wert 0,4.
Große Abweichungen immer möglich, Chancen dafür sinken wachsendem n


Verteilung der relativen Häufigkeit bei p=0,4 und n
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
pk
0,03
0,20
0,40
0,60
0,80
0,98
k/n
n=100
n=50
n=20

Güte der Schätzung

$$P(|h_n - p| \leq \varepsilon) \geq 1 - \alpha$$

Stichprobenumfang n, Genauigkeit ε und Sicherheit $1 - \alpha$ hängen zusammen:

ε fest:	Je größer n, desto größer $1 - \alpha$
$1 - \alpha$ fest:	Je größer n, desto kleiner ε
n fest:	Je kleiner ε, desto kleiner $1 - \alpha$.

Kenngrößen:

- $E(h_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n \cdot p}{n} = p$
- $Var(h_n) = Var\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n \cdot p \cdot (1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$

Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

– falls n groß (Faustregel $np(1-p) > 9$) –

$$P\left(|h_n - p| \leq k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \approx \begin{cases} 0,683 & k = 1 \\ 0,954 & k = 2 \\ 0,997 & k = 3 \end{cases}$$

$\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz

$$P\left(|h_n - p| \leq k\sqrt{p(1-p)}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx \begin{cases} 0,683 & k=1 \\ 0,954 & k=2 \\ 0,997 & k=3 \end{cases}$$

Wenn man n Versuche macht, muss man mit Abweichungen der Größenordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ von der erwarteten relativen Häufigkeit der Erfolge rechnen.

$\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$P\left(|h_n - p| \leq k\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \gtrapprox \begin{cases} 0,683 & k=1 \\ 0,954 & k=2 \\ 0,997 & k=3 \end{cases}$$

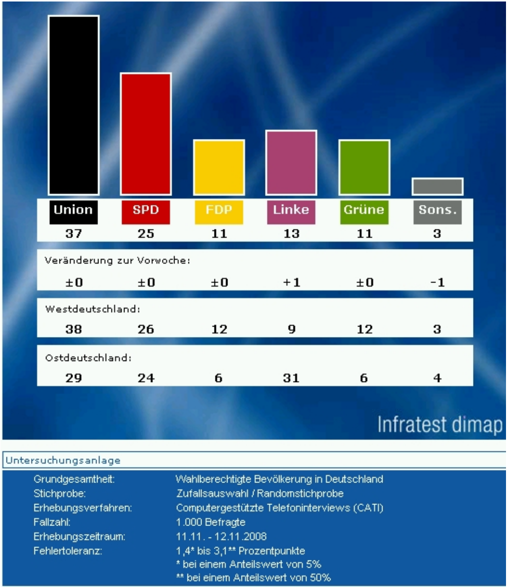
Für $k = 2$:

$$P\left(|h_n - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \gtrapprox 0,954$$

Merkregel

Wenn die Schätzgröße h_n die Genauigkeit ε mit einer Sicherheit von etwa 95% besitzen soll, dann wähle das kleinste n mit $n \geq \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

$\varepsilon = 0,05 \Rightarrow n = 400$



Quelle: `www.infratest-dimap.de/?id=9`, 27.11.2008, 12.30 Uhr

Untersuchungsanlage	
Grundgesamtheit:	Wahlberechtigte Bevölkerung in Deutschland
Stichprobe:	Zufallsauswahl / Randomstichprobe
Erhebungsverfahren:	Computergestützte Telefoninterviews (CATI)
Fallzahl:	1.000 Befragte
Erhebungszeitraum:	11.11. - 12.11.2008
Fehlertoleranz:	1,4* bis 3,1** Prozentpunkte * bei einem Anteilswert von 5% ** bei einem Anteilswert von 50%

$$P\left(|h_n - p| \leq k\sqrt{p(1-p)}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx 0,954$$

$n = 1000$ und $p = 0,50$ liefern $\varepsilon = 0,0316$

$n = 1000$ und $p = 0,05$ liefern $\varepsilon = 0,0138$

Gesetz der großen Zahlen

Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} P(|h_n - p| > \varepsilon) = 0. \quad (*)$$

In Worten: Zu jeder festen Genauigkeit kann man durch entsprechend großen Stichprobenumfang jede beliebige Sicherheit $0 < 1 - \alpha < 1$ garantieren.

Statt Standardsicherheiten beliebige Sicherheiten.

Ausdruck (*) für Schüler schwierig