Modellierungskonzepte 2

Elke Warmuth

Humboldt-Universität Berlin

WS 2008/09

Was ist neu?

- mehrstufige Vorgänge
- weder Abzählen im Laplace-Modell noch Beobachten und Schätzen mit Hilfe relativer Häufigkeiten
- sondern: Wahrscheinlichkeiten werden aus anderen Wahrscheinlichkeiten **berechnet**
- folglich: Rechenregeln müssen plausibel gemacht/ verstanden werden

- Modell für mehrstufigen Vorgang beginnt mit Baumdiagramm
- Pfade $\triangleq$ Ergebnisse des Vorgangs
- alle Pfade bilden Ergebnismenge
- Gesamtwahrscheinlichkeit 1 oder 100% muss auf die Pfade verteilt werden

Ereignis A beschrieben durch die für A **günstigen** Pfade

2. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der für dieses Ereignis günstigen Pfade.

- 2. Pfadregel (✓✓) – kein neuer Lernstoff, sondern Grundeigenschaft einer Wahrscheinlichkeitsverteilung
- bereits bei Laplace-Wahrscheinlichkeiten benutzt
- wird intuitiv richtig gemacht

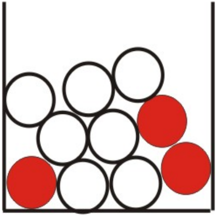
1. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades.

- 1. Pfadregel (✓) – neues Modellierungskonzept, muss plausibel gemacht werden
- Bausteine: Wahrscheinlichkeiten an den Pfadstücken
- Bausteine werden der Beschreibung des Vorgangs entnommen, können Laplace-Wahrscheinlichkeiten sein
- sind dem Wesen nach bedingte Wahrscheinlichkeiten

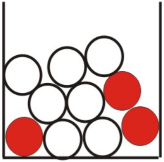
Wähle Beispiel mit einfachem Kontext (Prototyp)

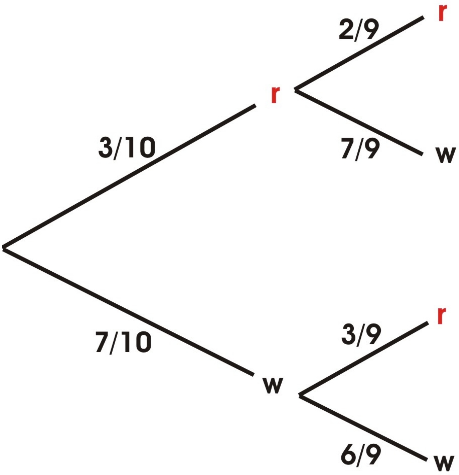
Ziehen ohne Zurücklegen

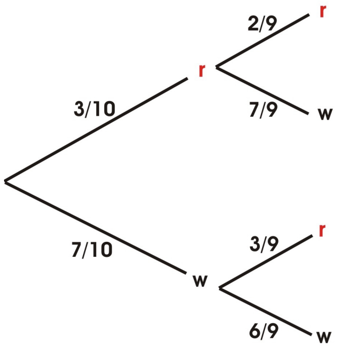


Aus der Urne wird zweimal ohne Zurücklegen gezogen.

Wir beobachten die Farbe der Kugeln mit Reihenfolge.




3/10
r
2/9
r
7/9
w
7/10
w
3/9
r
6/9
w



- **Wenn** die erste Kugel rot war, **dann** ist die zweite Kugel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{9}$ rot.
- **Wenn** die erste Kugel rot war, **dann** ist die zweite Kugel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{9}$ weiß.
- ....

Argumentation über Chancen

Die **Gesamtwahrscheinlichkeit 1 (bzw. 100%)** wird **verteilt**:

- $\frac{3}{10}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel rot ist.
- **Von diesen** $\frac{3}{10}$ entfallen $\frac{2}{9}$ auf den Fall, dass auch die zweite gezogene Kugel rot ist.
- $\frac{2}{9}$ **von** $\frac{3}{10}$ sind $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$.
- Der Pfad **rr** bekommt die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$.

Argumentation über Häufigkeitsinterpretation

Wir beobachten eine **große** Anzahl von Ziehungen, z.B. 10000:

- In **etwa** $\frac{3}{10}$ der 10000 Ziehungen ist die erste gezogene Kugel rot. Das sind **etwa** $\frac{3}{10} \cdot 10000$ Ziehungen.
- **Von diesen** etwa $\frac{3}{10} \cdot 10000$ Ziehungen entfallen **etwa** $\frac{2}{9}$ auf den Fall, dass auch die zweite gezogene Zahl rot ist. Das sind **etwa** $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot 10000$ Ziehungen.
- Die **relative** Häufigkeit des Pfades **rr** in 10000 Ziehungen beträgt also **etwa**

$$\frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot 10000}{10000} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$$

Je größer die Anzahl der Ziehungen ist, desto weniger wird die relative Häufigkeit von diesem Wert abweichen. Deshalb bekommt der Pfad **rr** die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$.

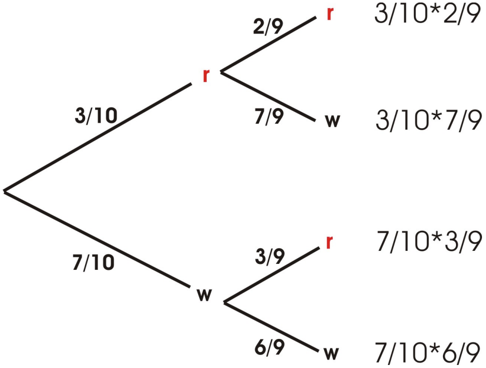
Argumentation über Laplace-Wahrscheinlichkeit

Wir müssen uns die Kugeln durchnummeriert denken. Kugeln mit Nummern 1, 2 und 3 sind rot, der Rest weiß.

- Ergebnismenge
  $\Omega = \{(k_1, k_2) : k_1, k_2 \in \{1, 2, \ldots, 10\}, k_1 \neq k_2\}$
- Es gibt $10 \cdot 9 = 90$ gleichwahrscheinliche Ergebnisse.
- Der Pfad **rr** ist in diesem Modell ein **Ereignis**. Für **rr** gibt es $3 \cdot 2 = 6$ günstige Ergebnisse.
- Es folgt $P(\mathbf{rr}) = \frac{6}{90}$.
- Es ist $\frac{6}{90} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$.

schwache Argumentation

Wahrscheinlichkeiten aller Pfade:



$$\text{Probe}: \quad \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{9} \quad = \quad 1$$

$$P(\text{2. Kugel ist weiß}) = \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9} \quad = \quad \frac{7}{10}$$

Hintergrund zu Pfadregeln:

- Anfangswahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten (Übergangswahrscheinlichkeiten)

  $\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeiten für mehrstufigen Versuch
- Beispiel: $\frac{2}{9}$ – (per Vorgang) bedingte Wahrscheinlichkeit für r in der zweiten Ziehung, wenn ich schon weiß, dass die erste Ziehung r ergab
  bedingte Wahrscheinlichkeiten naiv/intuitiv verwendet:
  9 Kugeln sind noch da, davon 2 rote

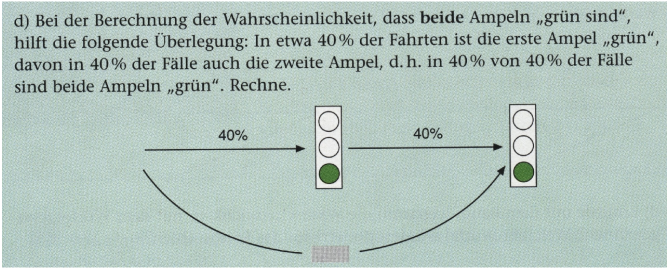
- Allgemeine Multiplikationsformel:

  Für Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit
  $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ gilt

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &\quad \cdot \ldots \cdot \\ &\quad P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

  Konstruktion „folgt“ dem Satz im Modell

grüne Seiten	Was Dich erwartet
weiße Seiten	Basiswissen

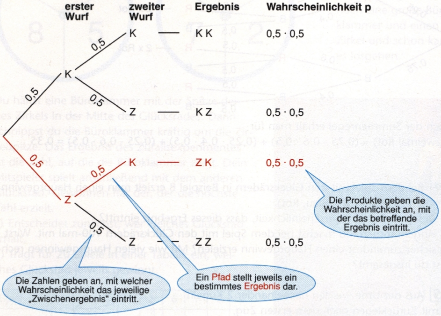

d) Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass **beide** Ampeln „grün sind", hilft die folgende Überlegung: In etwa 40 % der Fahrten ist die erste Ampel „grün", davon in 40 % der Fälle auch die zweite Ampel, d. h. in 40 % von 40 % der Fälle sind beide Ampeln „grün". Rechne.

Quelle: Mathematik Neue Wege 7, Gymnasium, Schroedel, 2004

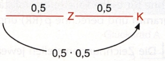
Baumdiagramme

Mit einem Baumdiagramm kann man alle möglichen Ergebnisse eines **mehrstufigen** Zufallsversuches übersichtlich darstellen.

Eine Münze wird zweimal geworfen. Das Baumdiagramm stellt alle möglichen Ergebnisse dieses Zufallsexperimentes dar.



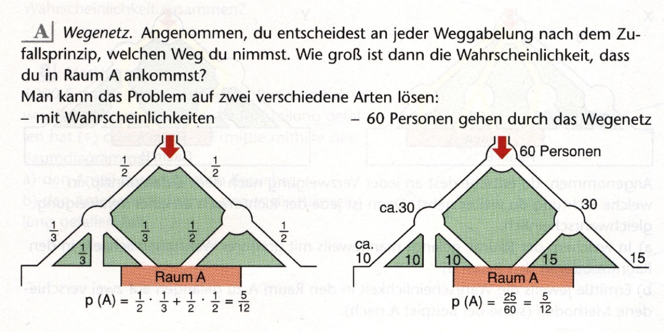
Rechenregel:
Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des jeweiligen Pfades.



p(Z K) = 0,5 · 0,5 = 0,25

Quelle: Mathematik Neue Wege 7, Gymnasium, Schroedel, 2004

- ⊕ Begründung, allerdings nicht konsequent
- ⊕ Summenregel als Anwendung
- ⊕ gute Struktur des Merkkastens
- ⊖ Spezialfall Unabhängigkeit



A *Wegenetz.* Angenommen, du entscheidest an jeder Weggabelung nach dem Zufallsprinzip, welchen Weg du nimmst. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass du in Raum A ankommst?
Man kann das Problem auf zwei verschiedene Arten lösen:
– mit Wahrscheinlichkeiten – 60 Personen gehen durch das Wegenetz

Quelle: Mathematik Neue Wege 7, Gymnasium, Schroedel, 2004

- Schlampiger Umgang mit dem Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten
- Man kann es so oder so machen – warum reden wir dann überhaupt über Wahrscheinlichkeiten?

Pfadregel und Summenregel

Aufgabe

1. In einem Behälter sind 4 blaue Kugeln und 2 rote Kugeln. Katharina zieht mit verbundenen Augen nacheinander zwei Kugeln (ohne Zurücklegen).

a. Zeichne ein Baumdiagramm. Notiere an den Zweigen des Baumes die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

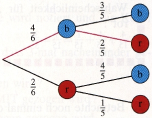
b. Welche Ergebnisse sind möglich?

c. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ergebnisse.

d. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Katharina zwei gleichfarbige Kugeln?

Lösung

a. Der Versuch ist zweistufig. Beim Eintragen der Wahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm musst du beachten, welche der beiden Stufen (Züge) du gerade betrachtest.



Erster Zug:
Wahrscheinlichkeit für „Zuerst blau" $= \frac{4}{6}$
Wahrscheinlichkeit für „Zuerst rot" $= \frac{2}{6}$

Zweiter Zug:
Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Beim ersten Zug wurde eine blaue Kugel gezogen.
Dann sind noch 3 blaue und 2 rote Kugeln vorhanden. Unter dieser Bedingung ist beim zweiten Zug die Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel $\frac{3}{5}$, für eine rote Kugel $\frac{2}{5}$.

2. Fall: Beim ersten Zug wurde eine rote Kugel gezogen.
Dann sind noch 4 blaue und 1 rote Kugel vorhanden. Unter dieser Bedingung ist beim zweiten Zug die Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel $\frac{4}{5}$, für eine rote Kugel $\frac{1}{5}$.

b. Insgesamt sind 4 Ergebnisse möglich: b b; b r; r b und r r.

Quelle: Mathematik heute 10, Realschule, Schroedel, 2004

c. Wir betrachten zunächst das Ergebnis „Zuerst blau, dann rot", kurz: b r
Dazu gehört der rot gezeichnete Weg im Baumdiagramm.
Angenommen, der Versuch wird 1200-mal wiederholt.
Dann kann man *beim ersten Zug* bei $\frac{4}{6}$ von den 1200 Versuchen, also 800 Versuchen eine blaue Kugel erwarten. Ist die erste Kugel blau, dann kann man *beim zweiten Zug* in $\frac{2}{5}$ der 800 Fälle, also in 320 Fällen eine rote Kugel erwarten.
Am Pfeildiagramm rechts erkennst du, mit welcher Häufigkeit man das Ergebnis b r erwarten kann.

$$1200 \xrightarrow{\cdot\frac{4}{6}} 800 \xrightarrow{\cdot\frac{2}{5}} 320$$

Du erhältst $\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{4}{15}$. Das bedeutet:
Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis b r ist $\frac{4}{15}$.
Man erhält also die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{15}$, indem man die Wahrscheinlichkeiten $\frac{4}{6}$ und $\frac{2}{5}$ an den Pfaden miteinander multipliziert.
Entsprechend findest du:
Wahrscheinlichkeit für b b: $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
Wahrscheinlichkeit für r b: $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$
Wahrscheinlichkeit für r r: $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

d. Das Ereignis „Zwei gleichfarbige Kugeln" besteht aus den beiden Ergebnissen b b und r r. Dieses Ereignis ist in $\frac{2}{5} + \frac{1}{15}$ aller Versuche zu erwarten. Es ist $\frac{2}{5} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Zwei gleichfarbige Kugeln" ist also $\frac{7}{15}$.

Quelle: Mathematik heute 10, Realschule, Schroedel, 2004

Einstiegsaufgabe – Lösung soll im Unterricht erarbeitet werden
sehr ausführlich

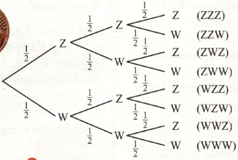
- $\oplus$ Begründung
- $\oplus$ abhängiger Fall
- $\oplus$ Summenregel als Anwendung
- $\ominus$ stark verkürzte Häufigkeitsinterpretation
- $\ominus$ Was heißt „erwarten"?

Seite zum Nachschlagen

Ein Zufallsversuch, der aus mehreren Teilversuchen besteht, wird als **mehrstufiger Zufallsversuch** bezeichnet. Er lässt sich mit Hilfe eines **Baumdiagramms** veranschaulichen. Jeder **Pfad** des Baumdiagramms zeigt dabei ein mögliches Ergebnis auf.

Beispiel

Eine Münze wird dreimal geworfen. Folgende Ergebnisse sind möglich:



Die Wahrscheinlichkeit für „Zahl" bzw. „Wappen" beträgt bei jedem einzelnen Wurf $\frac{1}{2}$ und ist jeweils an den Ästen der Pfade vermerkt.
Es gibt acht mögliche, gleich wahrscheinliche Ergebnisse. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis $\frac{1}{8}$.
Berechnet man andererseits das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades erhält man $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

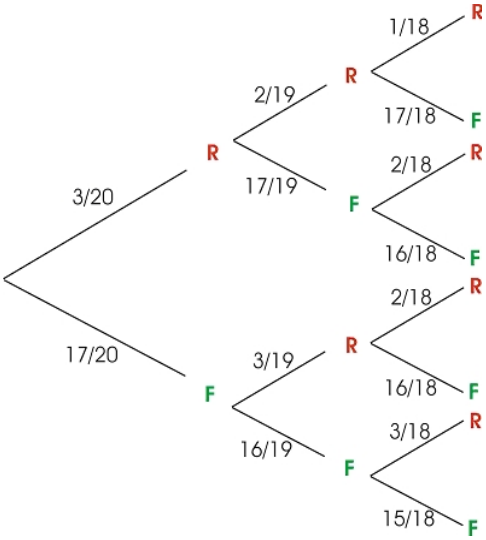
Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades erhält man durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades.

Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist auch hier die Summe aus den Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse, also der zugehörigen Pfade.

Quelle: mathe live 8, Gesamtschule, Klett, 2001

- $\oplus$ Summenregel als Anwendung
- $\ominus$ nur Fall gleichwahrscheinlicher Pfade
- $\ominus$ keine inhaltliche Begründung

Mini-Lotto


3/20
R
17/20
F
2/19
R
17/19
F
3/19
R
16/19
F
1/18
R
17/18
F
2/18
R
16/18
F
2/18
R
16/18
F
3/18
R
15/18
F

Gesamtwahrscheinlichkeit 1 auf die Pfade verteilt $\Rightarrow$ Nachrechnen!

Ereignis: „2 Richtige“:

günstige Pfade RRF, RFR, FRR, alle dieselbe Wahrscheinlichkeit (nicht kürzen!) $\Rightarrow$

$P(2 \text{ Richtige}) = 3 \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{17}{18} \approx 0,045.$

Anzahl Richtige	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	$0,596$	$0,358$	$0,045$	$0,001$

Ereignis: „Dritte gezogene Zahl ist richtig“:

günstige Pfade RRR, RFR, FRR, FFR $\Rightarrow$

$P(\text{Dritte gezogene Zahl richtig}) = \frac{3\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 17\cdot 2 + 17\cdot 3\cdot 2 + 17\cdot 16\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18} = \frac{3}{20}$.

Vergleichsexperiment zu Lotto:

n-facher Münzwurf: Ereignis A: „Es fallen n Wappen“
$P(A) = 0,5^n$

Frage: Für welches n ist die Wahrscheinlichkeit für lauter Wappen ungefähr so groß wie die Wahrscheinlichkeit für einen Dreier im Minilotto 3 aus 20?

$$0,5^n \approx 0,001 \text{ für } n = 10$$

Spam-Filter (Beispiel für Klasse 9/10)

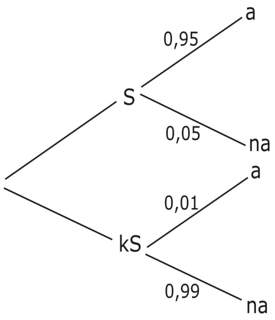
Quelle: H. Wirths In: Stochastik in der Schule 25(2005)Heft 2

„Till will Werbemüll (Spam) von seinem E-Mail-Konto aussperren. Er installiert den von einer Computerzeitschrift ermittelten Testsieger, der 95% aller Werbemails ausfiltert. Leider sortiert das Programm auch 1% aller privaten E-Mails und von Till bestellten Infobriefe als Spam aus. Beurteile die Qualität des Spamfilters. Würdest Du ihn benutzen?“

Offene Aufgabe

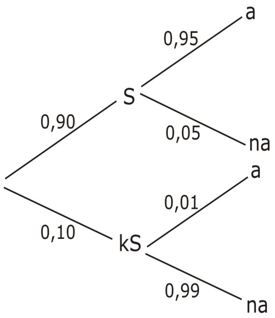
Problem: Informationen aus dem Aufgabentext verarbeiten

E-Mail kommt an: Spam (S) oder kein Spam (kS)
wird aussortiert (a) oder nicht aussortiert (na)



Informationen fehlen, benutzerabhängig $\Rightarrow$
verschiedene Modelle oder p als Parameter

Beispiel $p = 0,90$



Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine E-Mail aussortiert?

$$P(a) = 0,90 \cdot 0,95 + 0,10 \cdot 0,01 = 0,856$$

Mögliche Fragen:

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine aussortierte E-Mail kein Spam? Falsch schlechte Mails.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine nicht aussortierte E-Mail Spam? Falsch gute Mails.

Mit Häufigkeitsinterpretation:
Es wurden viele E-Mails beobachtet:

1. Ungefähr welcher Anteil der aussortierten E-Mails ist kein Spam? Falsch schlechte Mails.
2. Wie groß ist ungefähr der Anteil der Spam-Mails an den nicht aussortierten E-Mails? Falsch gute Mails.

Vierfeldertafel

	aussortiert	nicht aussortiert	
Spam	$0,90 \cdot 0,95 = 0,855$	$0,90 \cdot 0,05 = 0,045$	$0,90$
kein Spam	$0,10 \cdot 0,01 = 0,001$	$0,10 \cdot 0,99 = 0,099$	$0,10$
	$0,856$	$0,144$	1

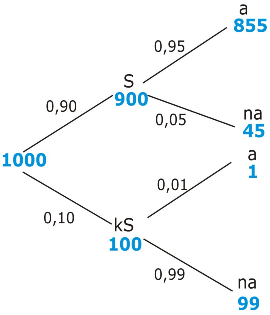
1. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{0{,}001}{0{,}856} = 0,001$ ist eine aussortierte E-Mail kein Spam.
2. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{0{,}045}{0{,}144} = 0,313$ ist eine nicht aussortierte E-Mail Spam.

vielfältig verbalisieren lassen $\Rightarrow$ Verständnis für Bedingtes und Bedingung, Anworten auf die Ausgangsfrage nicht vergessen!

Verwunderung meist bei 2. – So groß?

Vorschlag: absolute Häufigkeiten

Schicken 1000 E-Mails ab: **etwa 900** Spam-Mails. Davon sortiert der Spam-Filter **etwa 855** aus, ...

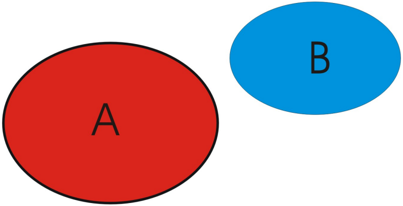


$$P(S|na) = \frac{45}{144} \approx 0,313$$

Aspekte der bedingten Wahrscheinlichkeit

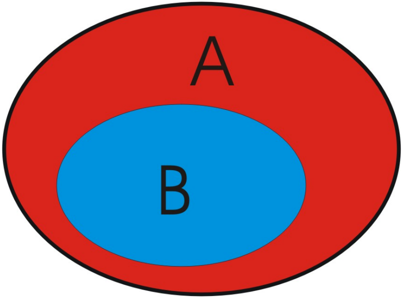
- Umbewertung von Chancen angesichts von Informationen über das Zufallsexperiment
- Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (bedingte Wahrscheinlichkeiten sind gegeben, 1. Pfadregel)
- a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten (Bayessche Formel)
- Berechnung von Wahrscheinlichkeiten durch Zerlegung der Ergebnismenge (Summenregel, Formel für die totale Wahrscheinlichkeit)

Ereignis B ist eingetreten – ändert das die Bewertung der Chancen für das Eintreten des Ereignisses A?



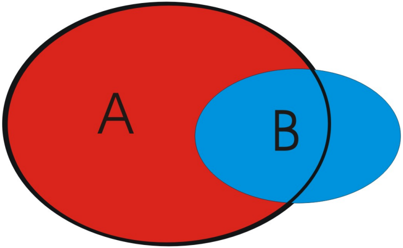
Ja, die Ereignis A bekommt nun (angesichts der Information über das Eintreten von B) die Wahrscheinlichkeit $P(A|B) = 0$.

Ereignis B ist eingetreten – ändert das die Bewertung der Chancen für das Eintreten des Ereignisses A?



Ja, die Ereignis A bekommt nun (angesichts der Information über das Eintreten von B) die Wahrscheinlichkeit $P(A|B) = 1$.

Ereignis B ist eingetreten – ändert das die Bewertung der Chancen für das Eintreten des Ereignisses A?



Ja, die Ereignis A bekommt nun (angesichts der Information über das Eintreten von B) die Wahrscheinlichkeit $P(A|B) = ?$

Spezialfall Laplace-Modell

- Ereignis A: $a = |A|$ günstige gleichwahrscheinliche Ergebnisse
- Ereignis B: $b = |B|$ günstige gleichwahrscheinliche Ergebnisse
- Ereignis $A \cap B$: $c = |A \cap B|$ günstige gleichwahrscheinliche Ergebnisse

B ist eingetreten $\Rightarrow$

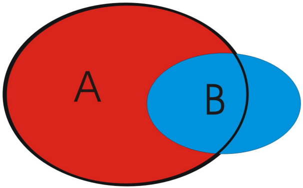
- b mögliche gleichwahrscheinliche (!) Ergebnisse
- c günstige gleichwahrscheinliche (!) Ergebnisse

folglich

$$P(A|B) = \frac{c}{b} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Vorbereitung auch durch **Vierfeldertafel** möglich

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1



Bedingte Wahrscheinlichkeit

Für Ereignisse A und B mit $P(B) > 0$

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Umbewertung von Chancen

- Beispiel Lotto 3 aus 20: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte gezogene Zahl richtig ist? Antwort: $\frac{3}{20}$
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte gezogene Zahl richtig ist, wenn die beiden vorhergehenden keine richtigen für mich waren? Antwort: $\frac{3}{18} > \frac{3}{20}$
- Beispiel Lebensversicherung: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein weibliches Neugeborenes mindestens 80 Jahre alt wird? Antwort: 0,52749
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 20jährige Frau mindestens 80 Jahre alt wird? Antwort: 0,53625
  Arbeit mit Sterbetafeln (1994).
  Nettoprämie einer Lebensversicherung.

Umbewertung von Chancen

- Keine künstlichen Aufgaben des Typs: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen zweier Würfel die Augensumme mindestens 7 ist, wenn man weiß, dass einer der Würfel eine 3 zeigt?
  zurechtgestutzte Information
  am Sinn bedingter Wahrscheinlichkeiten vorbei
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der sechste Wurf mit einer guten Münze Wappen bringt, wenn vorher fünfmal Zahl fiel? Antwort: $\frac{1}{2}$
  Modellierung: Unabhängigkeit

a priori – von vornherein und a posteriori – nachträglich

Spam-Beispiel: S – Spam, na – nicht aussortiert

- a priori: $P(S) = 0,90$
- a posteriori: $P(S|na) = ?$

$$
\begin{aligned}
P(S|na) &= \frac{P(S \cap na)}{P(na)} \\
&= \frac{P(na|S) \cdot P(S)}{P(na)} && \text{(1. Pfadregel)} \\
&= \frac{P(na|S) \cdot P(S)}{P(na|S) \cdot P(S) + P(na|\overline{S}) \cdot P(\overline{S})} && \text{(2. Pfadregel)} \\
&= 0,313
\end{aligned}
$$

Wir sind zur **Bayesschen Formel** gekommen, indem wir die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und die Pfadregeln (bzw. Multiplikations- und Additionssatz) angewendet haben.

Die Bayessche Formel lernt man nicht auswendig!

Verwechslung von Bedingung und Bedingtem

2. *Gefahr der Verwechslung von Wahrscheinlichkeiten*

Bei einer Wahl wurde Partei A vor allem von jüngeren Wählern gewählt. Eine repräsentative Befragung am Wahltag ergab die nebenstehenden Daten. Welche Schlagzeile für eine Zeitungsmeldung ist richtig?

		Wähler von Partei A	Wähler von sonstigen Parteien	gesamt
Altersgruppe	unter 30 Jahre	4,5%	13,5%	18,0%
	30 Jahre und älter	7,5%	74,5%	82,0%
gesamt		12,0%	88,0%	100,0%

(1) **Jeder vierte Wähler der Partei A ist unter 30**

(2) **Jeder vierte Wähler unter 30 entschied sich für Partei A**

Quelle: Elemente der Mathematik 9, Gymnasium, Schroedel, 2004

A – Partei A $\qquad \overline{A}$ – sonstige Partei
J – unter 30 Jahre $\qquad \overline{J}$ – mindestens 30 Jahre alt

$P(J \cap A) = 0,045$	$P(J \cap \overline{A}) = 0,135$	$P(J) = 0,180$
$P(\overline{J} \cap A) = 0,075$	$P(\overline{J} \cap \overline{A}) = 0,745$	$P(\overline{J}) = 0,820$
$P(A) = 0,120$	$P(\overline{A}) = 0,880$	1

$$P(J|A) = \frac{P(J \cap A)}{P(A)} = \frac{0.045}{0,12} = 0,375$$

$$P(A|J) = \frac{P(J \cap A)}{P(J)} = \frac{0.045}{0,18} = 0,25$$

ADAC-Motorwelt: „Der Tod fährt mit! Vier von zehn tödlich verunglückten Autofahrern trugen keinen Sicherheitsgurt!“

1. Völlig irrelevante Information $P(\text{Gurt}|\text{Tod})$
2. Interessant wären $P(\text{Tod}|\text{Gurt})$ und $P(\text{Tod}|\text{kein Gurt})$
3. Aus 1. kann man zunächst nichts über 2. folgern.

Quelle: W. Krämer: Denkste! Trugschlüsse aus der Welt der Zahlen und des Zufalls. München: Pieper Verlag GmbH, 2003

Gefangenenparadox

3 Gefangene wurden verurteilt:

Der Diktator hat einen Verurteilten per Losentscheid begnadigt.
Die 3 Gefangenen kennen das Ergebnis noch nicht.

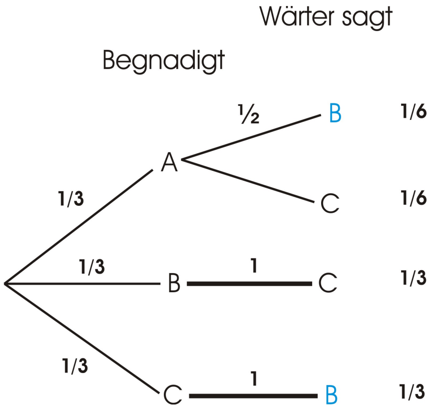
Anton überlegt: $\frac{1}{3}$ Wahrscheinlichkeit für meine Begnadigung.
Er fragt den Wärter nach dem Namen eines Verurteilten.
Argument: Das ändert doch meine Lage nicht!

Wärter sagt: Bruno wird verurteilt.

Anton

freut sich: nun 50% Chancen für meine Begnadigung.

Was kann alles passieren?



Ausgänge **nicht** gleichwahrscheinlich!

Sechsfeldertafel

	Begnadigt			
	A	B	C	
Wärter sagt				
B	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Antons Chancen: $\frac{1}{6}$ zu $\frac{1}{2}$ gleich $\frac{1}{3}$
oder formaler:

$$P(\text{A wird begnadigt}|\text{Wärter sagt B verurteilt}) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

wie vorher! Information war irrelevant für die Chancen.