

Fraktale und Chaos

Teilnehmer:

Markus Auricht (Heinrich-Hertz-Oberschule)
Martin Czudra (Andreas-Oberschule)
Robert Foellmer (Heinrich-Hertz-Oberschule)
Aser Hage-Ali (Heinrich-Hertz-Oberschule)
Alexej Maximov (Andreas-Oberschule)
Christian Otto (Heinrich-Hertz-Oberschule)
Henri Zimmermann (Heinrich-Hertz-Oberschule)

Gruppenleiter:

Klaus Mohnke (Humboldt-Universität)

Wir beschäftigten uns mit Fraktalen, die aus dem Studium komplexer dynamischer Systeme stammen.

Zuerst mussten wir dazu verstehen, was Fraktale sind. Zu diesem Zweck wurden die Begriffe der Selbstähnlichkeit und der Kstchenzhldimension eingeführt und anhand einfacher Beispiele (Cantor-Menge, Sierpinski-Dreieck) verdeutlicht.

Dann untersuchten wir dynamische Systeme auf der komplexen Zahlenebene, die durch quadratische Polynome gegeben werden. Wir bestimmten die Fixpunkte und diskutierten deren Eigenschaften, anziehend oder abstoend zu sein. Daraus leiteten wir den Begriff der Julia-Menge ab und waren somit in der Lage, die Mandelbrotmenge zu definieren.

Unsere Erkenntnisse wendeten wir schließlich erfolgreich beim Programmieren der Mandelbrot-Menge und einiger Julia-Mengen an.

1 Ein Beispielfraktal: Das Sierpinski-Dreieck

Das Sierpinski-Dreieck gehört zu den berühmtesten Fraktalen. Die Bildungsvorschrift ist wie bei vielen Fraktalen relativ einfach:

- (1) Man nehme ein gleichseitiges Dreieck und teile dessen Seiten. Die entstehenden Punkte werden verbunden, so dass vier neue gleichseitige Dreiecke entstehen. Das mittlere Dreieck wird herausgenommen. Nun teile man die

drei äußeren Dreiecke und wiederhole die obigen Schritte wie beschrieben (siehe Anhang 2).

- (2) Das Sierpinski-Dreieck lässt sich auch auf andere Weise approximieren. Der Algorithmus lässt sich, auch ohne PC, sehr leicht programmieren: Als erstes zeichne man ein gleichseitiges Dreieck und wähle einen Startpunkt, der möglichst auf eine der Dreiecksseiten liegen sollte. Nun lose man durch Zufall eine Zahl zwischen 1 und 3 aus. Dabei stehe die 1 für die linke untere Ecke, die 2 für die rechte und die 3 für die obere Ecke. Nun denke man sich eine Strecke zwischen der gewählten Ecke und seinem Startpunkt und setze einen neuen Punkt auf dem Mittelpunkt derselben. Dann bestimme man wieder zufällig eine Ecke und verfähre weiter wie oben beschrieben. Bei genügend vielen Durchgängen dieses Algorithmuses entsteht (optisch) das Sierpinski-Dreieck.

Das beschriebene Dreieck besitzt eine für viele Fraktale typische Eigenschaft:

Definition 1 (Selbstähnlichkeit) *Eine Struktur heißt selbstähnlich genau dann, wenn sie in Teile zerlegt werden kann, von denen jedes eine kleinere Kopie der Ausgangsstruktur ist.*

Das Sierpinski-Dreieck erfüllt diese Voraussetzung, da jedes der äußeren Dreiecke genügend vergrößert wieder kongruent zum Ausgangsdreieck ist. Weitere selbstähnliche Strukturen wären zum Beispiel die Cantor-Menge, der Sierpinski-Teppich, aber auch der Würfel, das Quadrat etc.

2 Fraktale Dimension

2.1 Die Selbstähnlichkeitsdimension

Wie oben beschrieben, können selbstähnliche Strukturen beliebig zerlegt werden und die entstandenen Teilmengen ergäben vergrößert wieder die Ausgangsmenge. Dies stimmt uneingeschränkt für nicht fraktale Strukturen. Fraktale lassen nur bestimmte Verkleinerungsfaktoren zu, so z.B. die Cantor-Menge (3^{-k}). Dies ist ein wesentlicher Unterschied zwischen Figuren wie dem Würfel oder dem Quadrat und den Fraktalen. Gemeinsam haben aber alle selbstähnliche Strukturen - ob fraktaler Natur oder nicht, dass eine Beziehung zwischen dem Verkleinerungsfaktor s und der Anzahl der verkleinerten Teile a , in welche die Struktur zerlegt worden ist, besteht:

$$a = s^{-D}$$

Betrachtet man diese Formel für das Quadrat und dem Würfel, so wird klar, dass es sich bei D um die Dimension handelt: Zerlegt man den Würfel in 27

Einzelwürfel (also $a = 27$ und $s = \frac{1}{3}$), so kann man die Dimension durch Umstellen der Formel leicht errechnen:

$$D = \log_3 27 = 3$$

Wir wollen nun die Selbstähnlichkeitsdimension D des oben genannten Sierpinski-Dreieckes errechnen:

Die Dreiecksseiten werden nach Bildungsvorschrift halbiert, d.h. $s = \frac{1}{2}$. Nun entstehen aber in einem Schritt 3 neue Dreiecke, was $a = 3$ bedeutet. Setzen wir dies nun in die oben stehende Formel ein:

$$D = \log_2 3 \approx 1,585.$$

Dies entspricht einer fraktalüblichen, nicht ganzzahligen Dimension.

2.2 Die Box- oder Kästchenzähldimension

Bei nicht selbstähnlichen Fraktalen kann die Komplexität derselben mit Hilfe der Box-Dimension beschrieben werden. Diese ist ein systematisches Messverfahren, welches sich auf jede Struktur in der Ebene oder im Raum anwenden lässt.

Man lege sich auf die Struktur ein regelmäßiges Gitternetz mit Maschenweite s (siehe Anhang 1; hier: $s = \frac{1}{6}$). Nun zähle man die Gittermaschen, die von der Struktur berührt werden. Die Anzahl dieser sei $n(s)$. Halbiert man nun die Maschenweite ($s = \frac{1}{16}$), bestimmt abermals n und trägt die Werte in ein doppellogarithmisches Diagramm ($\log(n(s)) - \log(\frac{1}{s})$ -Diagramm), so wird die Box-Dimension annähernd durch den Anstieg der Gerade durch die zwei Punkte bestimmt. Im gewählten Beispiel, welches nur zur Verdeutlichung des Berechnungsweges dient, kommt man auf die Punkte $P_1 = (0,78; 1,51)$ und $P_2 = (1,08; 1,91)$.

Der Anstieg der Geraden durch die beiden Punkte berechnet sich folgendermaßen:

$$m = \frac{\log(n(2^{-(k+1)})) - \log(n(2^{-k}))}{\log 2^{k+1} - \log 2^k} = \log_2 \frac{n(2^{-(k+1)})}{n(2^{-k})}$$

Die oben genannten Punkte in die Formel eingesetzt, ergibt sich:

$$m = \log_2 \frac{81}{32} \approx 1,34.$$

Zur genaueren Berechnung der Dimension kann die Maschenweite weiter verkleinert werden. Der Anstieg der Ausgleichsgeraden durch diese Punkte entspricht dann der Box-Dimension. Der Punkt $P_3 = (1,38; 2,23)$ entstand durch weitere Verfeinerung des Gitternetzes. Die Gerade, die durch die Punkte P_2 und P_3 geht, hat den Anstieg $m \approx 1,05$. Das bedeutet, dass der Anstieg der Ausgleichsgerade dazwischen liegt.

Die Teilmengen von \mathbb{R} und \mathbb{C} , die wir hier betrachten, zeichnen sich dadurch aus, dass sie eine gebrochene Kästchendimension besitzen. Dies ist eine Eigenschaft, die sogenannte fraktale Teilmengen fast immer besitzen. Fraktale sind dadurch charakterisiert, dass sie ungefähr selbstähnlich sind: man kann Ausschnitte in ihnen finden, die verkleinerte Kopien des Originals sind, aber nur mit einer beliebig guten Genauigkeit.

3 Dynamische Systeme

Definition 2 (Dynamisches System) Sei \mathcal{X} eine nicht leere Menge und $\mathbf{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Dann heißt $(\mathcal{X}; \mathbf{T})$ dynamisches System.

Man stelle sich vor, dass das Dynamische durch fortschreitendes Iterieren eines Elementes aus \mathcal{X} zustande kommt. Man verfolgt den Weg bzw. die Bahn des Punktes, auf den man fortwährend \mathbf{T} anwendet. Damit kann man ein mathematisches Modell für verschiedene dynamische Vorgänge schaffen. Oft sind dies Bewegungsabläufe.

Beispiel:

$$\mathcal{X}_{Bsp} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \{0; 1\}\}$$

$$\mathbf{T}_{Bsp}((x_n)) = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

mit $y_n = x_{n+1}$.

3.1 Wesentliche Begriffe zur Charakterisierung dynamischer Systeme

Definition 3 (a) Sei $(\mathcal{X}; \mathbf{T})$ dynamisches System. $x_0 \in \mathcal{X}$ heißt Fixpunkt von $\mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}(x_0) = x_0$

(b) $x_p \in \mathcal{X}$ heißt p -periodisch $\Leftrightarrow \mathbf{T}^p(x_p) = x_p$

(c) $\gamma = \{x \in \mathcal{X} \mid x = \mathbf{T}^n(x_p), n \in \{0, 1, \dots, p\}\}$ heißt periodischer Orbit bzw. periodische Bahn der Periode p .

Corollary 4 Jeder Fixpunkt ist periodisch.

3.1.1 Fixpunkte von $(\mathcal{X}; \mathbf{T}_{Bsp})$

Es ist leicht einzusehen, dass die unendliche Folgen $(x_n)_n$ mit $x_n \in \{0\}$ bzw. $x_n \in \{1\}$ die einzigen beiden Fixpunkte von $(\mathcal{X}; \mathbf{T}_{Bsp})$ sind.

3.1.2 Periodische Punkte von $(\mathcal{X}; \mathbf{T}_{Bsp})$

Auch hier ist leicht einsichtig, dass alle unendlichen Folgen, die aus einer periodischen Abfolge der beiden Werte 0 und 1 bestehen, periodische Punkte in $(\mathcal{X}; \mathbf{T}_{Bsp})$ sind.

Um weitere wichtige Eigenschaften dynamischer Systeme definieren zu können, ist ein Abstandsbegriff für die Elemente der Menge \mathcal{X} notwendig.

Definition 5 Sei \mathcal{M} eine nicht leere Menge und $\rho : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$. Gilt für alle $x, y \in \mathcal{M}$:

- (1) $\rho(x; y) = \rho(y; x)$,
- (2) $\rho(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (3) $\rho(x; y) \leq \rho(x; z) + \rho(z; y)$,

so heißt ρ Metrik in \mathcal{M} und $(\mathcal{M}; \rho)$ metrischer Raum.

Beispiel 6 Der euklidische Abstand $\rho(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{C}$ definiert eine Metrik auf \mathbb{C} .

Eine Teilmenge $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ eines metrischen Raumes (\mathcal{M}, ρ) ist selbst wieder ein metrischer Raum. Es ist nun möglich weitere wichtige Begriffe dynamischer Systeme zu definieren.

Definition 7 Sei x_0 Fixpunkt im dynamischen System $(\mathcal{X}; \mathbf{T})$ und ρ eine Metrik auf \mathcal{X} .

(a) x_0 heißt Attraktor genau dann, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für jedes $x \neq x_0$ mit $\rho(x_0; x) < \epsilon$ gilt:

$$\rho(\mathbf{T}(x); x_0) < \rho(x; x_0).$$

(b) Sei γ periodischer Orbit der Periode p . $x_0 \in \gamma$ heißt periodischer Attraktor, genau dann, wenn x_0 Attraktor bezüglich \mathbf{T}^p ist.

(c) Ein Fixpunkt x_0 heißt Repeller genau dann, wenn $\rho(\mathbf{T}(x); x_0) > \rho(x; x_0)$ unter (a) gilt.

(d) Analog definieren wir periodische Repeller.

Wir werden unten Beispiele dynamischer Systeme (\mathbb{C}, f_c) auf den komplexen Zahlen kennen lernen, die ein im mathematischem Sinne auf Teilmengen chaotisches Verhalten aufweisen.

4 Die Julia-Menge

Definition 8 (Julia-Menge) Die Julia-Menge \mathcal{J} ist der Abschluss der Menge der periodischen Punkte, die Repeller sind. Die Fatou-Menge \mathcal{F} ist das Komplement der Julia-Menge: $\mathcal{F} := \mathbb{C} \setminus \mathcal{J}$.

Um diese allgemeine Definition genauer zu verstehen, betrachte man den Begriff des Abschlusses einer Menge.

Definition 9 (Abschluss einer Menge) Für den Abschluss \bar{A} einer Menge $A \subset \mathbb{C}$ gilt:

$$\bar{A} = \{c \in \mathbb{C} \mid \exists (x_n)_n \subset A : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c\}.$$

Beispiel: $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Daraus ergibt sich dann die Definition für den Rand einer Menge.

Definition 10 Für den Rand ∂A einer Menge $A \subset \mathbb{C}$ gilt:

$$\partial A := \bar{A} \setminus A.$$

Beispiel: $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Sei a ein (periodischer) Attraktor der Periode p , dann bezeichne $A(a)$, seinen Einzugsbereich, d.h. die Menge derjenigen Punkte $x \in \mathbb{C}$, für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(x) = a.$$

Von nun an betrachten wir nur noch quadratische Polynome der Form $f_c(z) = z^2 + c$ für $c \in \mathbb{C}$ und bezeichnen deren Julia- und Fatou-Mengen entsprechend mit \mathcal{J}_c bzw. \mathcal{F}_c .

Satz 11 Für alle $c \in \mathbb{C}$ gilt:

- (1) $\mathcal{J}_c \neq \emptyset$,
- (2) $f_c(\mathcal{J}_c) = \mathcal{J}_c = f_c^{-1}(\mathcal{J}_c)$,
- (3) für alle periodischen Attraktoren gilt: $\partial A(a) = \mathcal{J}_c$,
- (4) für jeden Punkt $x \in \mathcal{J}_c$ ist der inverse Orbit bestehend aus den Punkten $\{y \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N} : f_c^k(y) = x\} \subset \mathcal{J}_c$ eine Teilmenge und sein Abschluss besteht aus der gesamten Menge \mathcal{J}_c .

Man kann wegen (2) das eingeschränkte dynamische System betrachten: $(\mathcal{J}_c, f_c|_{\mathcal{J}_c})$. Das besondere an unserem dynamischen System ist nun, dass dieses "chaotisches" Verhalten aufweist, d.h. z.B. dass die Orbits von nahe beieinander liegenden Punkten sehr verschieden aussehen, die periodischen Orbits eine überall dichte Menge bilden, und eine zusätzliche topologische Bedingung erfüllt ist, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.

5 Die Mandelbrotmenge M

5.1 Allgemeines zur Mandelbrotmenge M

Die Mandelbrotmenge M , auch "Apfelmännchen" genannt, besteht im Wesentlichen aus dem apfelförmigen Hauptkörper ("Hauptkardioid") und daran ansetzenden immer kleiner werdenden Knospen, die schließlich in sehr dünnen, fadenähnlichen Gebilden ("Dendriten") enden (siehe Anhang 2).

Diese noch relativ einfache Struktur wird umso mannigfaltiger, je tiefer man darin eintaucht. Wenn wir zum Beispiel in das sog. "Tal der Seepferdchen", das am Berührungspunkt der größten Knospe mit dem Hauptkardioid liegt, einzoomen, so können wir auf der linken und rechten Seite weitere feine Strukturen erkennen, denen man auf der linken Seite den Namen "Elefanten" gab, da diese Strukturen an Elefantenköpfe erinnern, und auf der rechten Seite den Namen "Monster" gab. Diese Monster wiederum besitzen eine Struktur, die auf den Kopf gestellt, einem Seepferdchen ähnelt. Wenn man Ausschnitte der Monster weiter vergrößern würde, würden wieder solche "Seepferdchen" sichtbar werden. Vergrößerungen der Segmente des Schwanzes des "Seepferdchens" bringen immer wieder diese Schwänze, die spiralähnlich sind, hervor, die sich um eine Miniaturabbildung der Mandelbrotmenge reihen. Die Mandelbrotmenge hat neben dieser Eigenschaft der beinahe Selbstähnlichkeit auch wichtige Eigenschaften in Bezug auf dynamische Systeme.

Die Mandelbrotmenge M hat, entgegen ihrer reichhaltigen Struktur, eine recht einfache Bildungsvorschrift:

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid J_c \text{ ist zusammenhängend}\}$$

Ist die zugehörige Julia-Menge zusammenhängend, so kann man von einem beliebigen Punkt von J_c zu einem anderen beliebigen Punkt von J_c gelangen, ohne die Julia-Menge selbst verlassen zu müssen. Man kann nachweisen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die Menge $A = \{f_c^n(0) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$ beschränkt ist; diese Aussage wiederum ist äquivalent zu $f_c^n(0) \not\rightarrow \infty$. Der erste Zusammenhang erfordert eine tiefgründige Kenntnis der Materie, die zweite Äquivalenz ist relativ einfach nachweisbar: Da es eine positive reelle Zahl r gibt, so dass $|f_c(z)| > 2|z|$ für $|z| > r$, ist diese Beziehung offensichtlich. Mit Hilfe dieses Kriteriums kann man simple Algorithmen zur Darstellung der Mandelbrotmenge programmieren. Erstaunlich ist, dass die Mandelbrotmenge selbst, wie die dazugehörigen Julia-Mengen, auch zusammenhängend ist. Außerdem gilt folgender

Satz 12 *Die Mandelbrotmenge liegt vollständig in der Kreisscheibe um 0 mit dem Radius $r = 2$. D.h. die Mandelbrotmenge ist beschränkt.*

Beweis:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) \neq \infty \Rightarrow |c| \leq 2\right) \Leftrightarrow (|c| > 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) = \infty)$$

Diese zweite Implikation wird im Folgenden bewiesen. Zunächst einmal stellen wir fest, dass die Folge $\{|f_c^n(0)|\}$ für $|c| > 2$ streng monoton wachsend ist.

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} |c| &< |c^2 + c| \\ \Leftrightarrow 1 &< |c + 1| \\ |c + 1| &\geq |c| - 1 > 1w.A. \end{aligned}$$

Induktionsannahme: Sei die Folge $\{|f_c^n(0)|\}$ bis zu einem Glied $|f_c^m(0)|$ streng monoton wachsend, also auch

$$2 < |c| < |f_c^m(0)| \tag{1}$$

Induktionsbehauptung: $|f_c^m(0)| < |f_c^{m+1}(0)| = |(f_c^m(0) * f_c^m(0) + c|$

Induktionsbeweis: Es gilt:

$$|(f_c^m(0) * f_c^m(0) + c| \geq |(f_c^m(0) * f_c^m(0)| - |c| \tag{2}$$

Zudem folgt aus (1) $|c| < |(f_c^m(0) * [|f_c^m(0)| - 1] \Leftrightarrow 0 < |(f_c^m(0) * f_c^m(0)| - |f_c^m(0)| - |c|$ Mit (2) folgt: $|f_c^m(0)| < |f_c^m(0) * f_c^m(0) + c| = |f_c^{m+1}(0)|$.

Induktionsschlussfolgerung: Damit ist die Folge streng monoton wachsend.

Nun gilt: $\exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 1 \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$\frac{|f_c^{n+1}(0)|}{|f_c^n(0)|} = |f_c^n(0) + \frac{c}{f_c^n(0)}| > |f_c^n(0)| - \frac{c}{f_c^n(0)} > |f_c^n(0)| - 1 > \delta > 1$$

Somit ist die Folge $\{|f_c^n(0)|\}$ gliedweise größer als die gegen unendlich strebende geometrische Folge $\{|c| * \delta^n\}$ und strebt damit selbst gegen unendlich. q.e.d.

6 Darstellung der Fraktale

Als Plattform wurde Mathematica 4.2 gewählt. Die entsprechenden Fraktale wurden dabei als Menge von Punkten behandelt und dargestellt.

6.1 Julia-Mengen J_c

Die Julia-Menge J_c ist definiert als der Rand der Einzugsbereiche A der entsprechenden Attraktoren: $J_c = \bar{A} \setminus A$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= z, z_n \in A, z \in \bar{A} \\ u &= f_c(z) = z^2 + c \\ \Rightarrow z &= \pm \sqrt{u + c} \\ \Rightarrow z &= f_c^{-1}(u) = \pm \sqrt{u + c} \end{aligned} \tag{3}$$

Daraus ergibt sich für $z \in J_c$:

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^{-n}(u)$$

Um die Julia-Menge J_c also darzustellen, errechnet man aus einer Menge M von zufällig gewählten Punkten u deren Position nach der i -ten Anwendung von $f_c^{-1}(u)$. Die errechneten Punkte kommen denen der Julia-Menge J_c beliebig nah. Beispielbild siehe Anhang.

Die so generierten Bilder haben jedoch den Nachteil, nur den äußeren Rand der Menge darzustellen. Strukturen im Inneren der Julia-Menge werden nicht sichtbar. Eine bessere Möglichkeit, diese darzustellen besteht darin, einen Punkt z zwischen zwei einander sehr nahen Punkten k_1, k_2 genau dann als Punkt $z \in J_c$ darzustellen, wenn gilt: $k_1 \in A_\infty, k_2 \notin A_\infty$, A_∞ sei der Einzugsbereich des Attraktors ∞ . Ferner gilt $k_1 \in A_\infty$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(z) = \infty$. Dieses Verfahren stellt J_c sehr viel genauer dar, Beispielbild siehe Anhang.

6.2 Mandelbrot-Menge M

Um eine geeignete Darstellung der Mandelbrot-Menge M zu erhalten, nutzt man eine Eigenschaft zusammenhängender Julia-Mengen J_c :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) \neq \infty$$

$c \in M$ gilt also genau dann, wenn Obiges gilt. Beispielausgaben im Anhang.

Anhang 1

Anhang 2

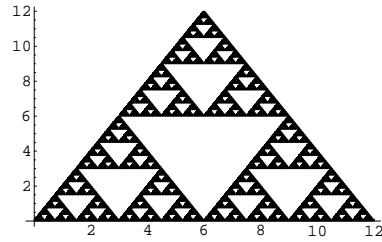


Abbildung 1: Sierpinski-Dreieck

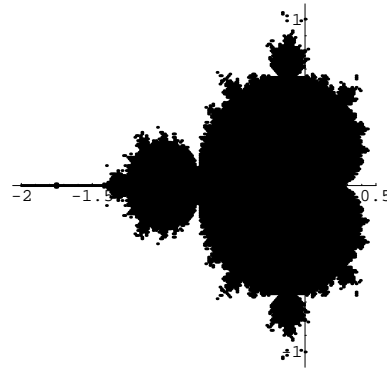


Abbildung 2: Mandelbrot-Menge

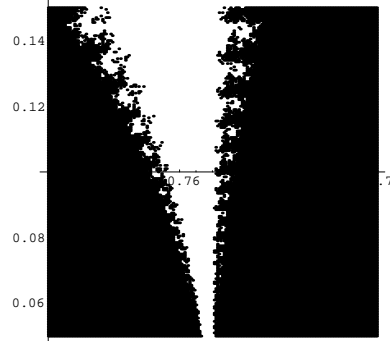


Abbildung 3: Das Tal der Seepferdchen

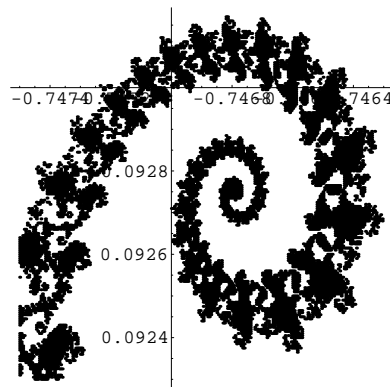


Abbildung 4: Spirale



Abbildung 5: Doppel-Spiralen

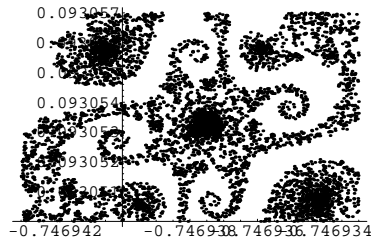


Abbildung 6: Vierfach-Spiralen

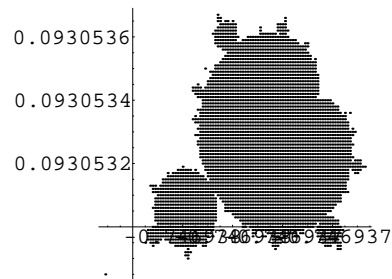


Abbildung 7: Kleine Mandelbrot-Menge im Spiralen-Zentrum

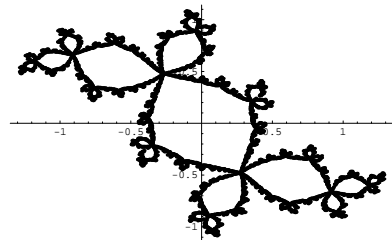


Abbildung 8: Der Douady-Hase - eine Julia-Menge