Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ über $\mathbb{Q}^+$ bzw. $\mathcal{B}$ nach $\mathbb{Q}$

Amrei Naujoks und Marei Böttcher

Überblick

1. Die natürliche Zahlen $\mathbb{N}$
   i. Einstimmung
   ii. Verschiedene Aspekte
   iii. Betrachtung von $\mathbb{N}$ in den einzelnen Jahrgangsstufen 1/2 , 3/4 und 5/6
2. Die Bruchzahlen $\mathbb{Q}^+$
   i. Gründe der Einführung
   ii. Definition
   iii. Eigenschaften
3. Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$
   i. Gruppenarbeit
   ii. Zusammenfassung
4. Rückblick unter strukturellen Gesichtspunkten

Natürliche Zahlen

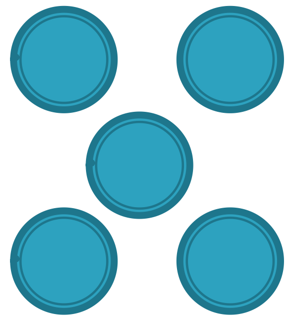
- Das Fach Mathematik ist das einzige Fach in der Schule, das stark hierarchisch aufgebaut ist.

  → wer am Anfang etwas verpasst, kann nicht mehr folgen.

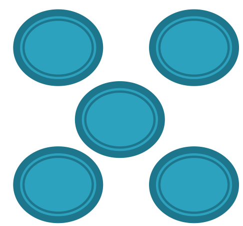
- In der Grundschule stehen die natürlichen Zahlen einschließlich der 0 im Vordergrund.

Natürliche Zahlen

- Was ist das?

5, VI, 

Natürliche Zahlen

5, VI, 

- „Zahlen sind Begriffe."
- Zahlen erfordern eine hohe Abstraktionsfähigkeit und verdeutlichen so die Schwierigkeiten der Mathematik.
- Zahlen werden durch Zeichen dargestellt.
- Zahlen dürfen nicht mit Zeichen verwechselt werden.

Natürliche Zahlen

- Die Aspekte des Begriffs der natürlichen Zahl werden durch zwei mathematische Modelle dargestellt:

1. Die natürliche Zahl als Kardinalzahl
2. Peano-Axiome/Die natürliche Zahl als Ordinalzahl

Natürliche Zahlen als Kardinalzahl

-
- Konkrete endliche Mengen
- $\mathbb{N}$ mit dem konkreten Objekt in Verbindung bringen und erfassen
- Zahlenmäßige Beschreibung von Mengen realer oder „gedachter“ Objekte

Natürliche Zahlen als Ordinalzahl/ Peano-Axiome

- Nachfolgerelation ist wichtig
  - Im Unterricht implizit verwendet, wenn Vorgänger & Nachfolger bestimmt werden
- Ordinalzahlaspekt
  - Zählzahlaspekt (fester Platz in der Zahlwortreihe)
  - Ordnungszahlaspekt (Reihenfolge festlegen; der wievielte?)

Natürliche Zahlen–
weitere Aspekte in der Schule

Aspekt	Erklärung
Maßzahlaspekt	Zahlen im Zusammenhang mit Einheiten (z.B.: 100g, 15km)
Operatoraspekt	Vielfachheit eines Vorganges oder einer Handlung (z.B.: 3x solang, 4x so oft)
Codierungsaspekt	Bezeichnung bzw. Unterscheidung von Objekten (z.B.: Telefonnummern, ISBN)
Rechenzahlaspekt a) Algorithmischer Aspekt b) Algebraischer Aspekt	 a) Verknüpfungen nach ganz bestimmten Regeln b) Algebraische Eigenschaften von Zahlen und Operationen
Relationszahlaspekt	Beziehungen zwischen den Zahlen werden betrachtet (z.B.: 9–4=17–12)

Natürliche Zahlen– Jahrgangsstufe 1/2

- Rahmenlehrplan:
  - Zahlenraum bis 100 (Klasse 1: bis 20; Klasse 2: bis 100)
  - Zahlen unter den verschiedenen Zahlaspekten auffassen und darstellen
  - Zahlen lesen und schreiben
  - …

Natürliche Zahlen– Jahrgangsstufe 1/2

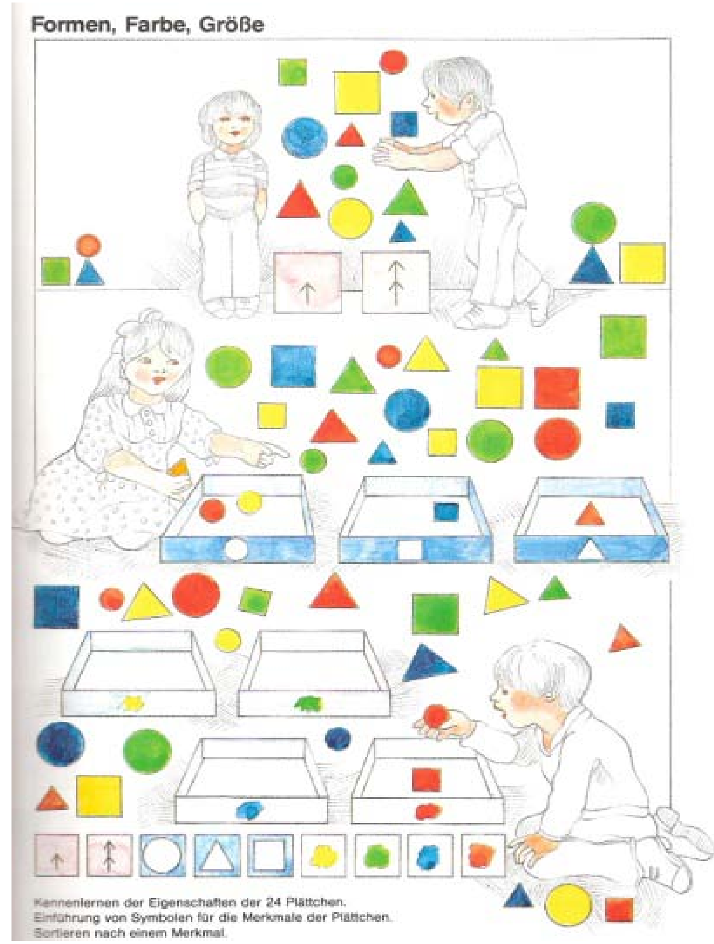
- Zwei verschiedene Vorgehensweisen im mathematischen Anfangsunterricht

1. Systematischer Lehrgang (traditionelles Vorgehen; kleinschrittig)
2. Ganzheitlicher Lehrgang (modernes Vorgehen; größerer Zahlenraum)

Natürliche Zahlen- Jg. 1/2
systematischer Lehrgang

1. Pränumerische Phase

- Ordnen, sortieren, vergleichen nach bestimmten Formen oder Merkmalen
  →Mengenbildung
- Stück-für-Stück-Zuordnungen



Natürliche Zahlen– Jg. 1/2 systematischer Lehrgang

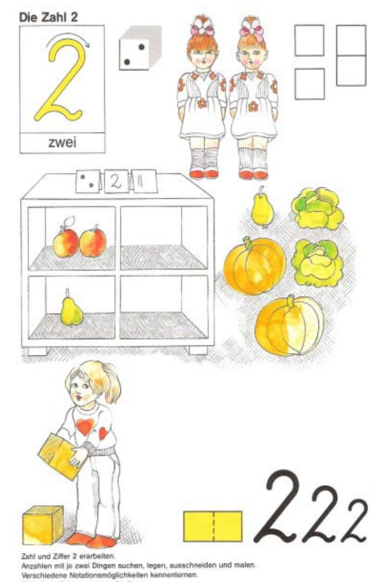
2. Nacheinander Einführung der Zahlen bis 5 (6) (kardinaler Aspekt steht im Vordergrund)

- Die Kinder sollen
  - Vorstellungen zu den einzelnen Zahlen erwerben
  - diese Zahlen auf verschiedene Weisen darstellen können
  - die Ziffern (also Symbole) kennen und formgerecht schreiben lernen
  - erste Beziehungen zwischen Zahlen kennen lernen

Natürliche Zahlen– systematischer Lehrgang Jg. 1/2

Dabei werden folgende Phasen durchlaufen:

Phase 1	Sammlung von Grunderfahrungen
Phase 2	Übergang von der konkreten Situation zur Arbeit mit didaktischem Material
Phase 3	Symbolische Notation von Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen



Natürliche Zahlen– Jg. 1/2 systematischer Lehrgang

3. Arbeiten mit den Zahlen bis 5 (6)
4. Einführung der Zahlen bis 10
5. Vergleichen; Ordnungszahlen
6. Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 10
7. Einführung der Zahlen bis 20

Natürliche Zahlen– systematischer Lehrgang Jg. 1/2

- Kennzeichen des systematischen Vorgehens:
  - Stofforientierung
  - Prinzip der Isolierung von Schwierigkeiten
  - Gliederung des Unterrichts entspricht Systematik des Stoffes
  - Kardinalzahlaspekt steht im Vordergrund
  - Lehrerzentriertheit

Natürliche Zahlen– systematischer Lehrgang Jg. 1/2

- Vorteile des systematischen Vorgehens
  - Unterrichtsablauf ist strukturiert; übersichtliche Einheit
  - Plan- und Kalkulierbarkeit für den Lehrer
  - Für Kinder nachvollziehbares Vorgehen; überschaubare Einheiten
- Nachteile des systematischen Vorgehens
  - Einengen der Initiative der Kinder
  - Ungenügende Berücksichtigung der Vorkenntnisse
  - Rezeptives Lernen steht im Vordergrund

Natürliche Zahlen– Jg.1/2
ganzheitliches Vorgehen

1. Von Beginn an wird ein größerer Zahlenraum zur Verfügung gestellt; konsequent bis 20; auch möglich bis 10

Natürliche Zahlen– Jg.1/2
ganzheitliches Vorgehen

2. Orientierung im Zwanzigerraum; dabei möglich, erst die Zahlen bis 10, dann bis 20

Natürliche Zahlen– Jg.1/2 ganzheitliches Vorgehen

3. Vertiefung des Zahlenbegriffs

- Verschiedene Zahlaspekte deutlich machen; Zahlzerlegung; Zahlen als Ordnungszahlen
- Dabei sollten folgende Phasen durchlaufen werden:
  - Phase 1: Vorkenntnisse erfassen, erweitern und systematisieren
  - Phase 2: Orientierungsübungen im Zwanzigerraum
  - Phase 3: Vertiefung des Zahlbegriffs

Natürliche Zahlen– Jg.1/2 ganzheitliches Vorgehen

- Kennzeichen des ganzheitlichen Vorgehens
  - Prinzip des entdeckenden Lernens
  - Mitverantwortung der Lernenden für den Lernprozess
  - Lehrer als Organisator von Lernprozessen; herausfordernde Aufgaben auswählen

Natürliche Zahlen– Jg.1/2
ganzheitliches Vorgehen

- Vorteile des ganzheitlichen Vorgehens:
  - Berücksichtigung des Vorwissens
  - Eigenverantwortung, individuelles Lerntempo
  - Differenzierung
  - keine Unterforderung „guter Schüler“
  - nutzen der natürlichen Neugier der Kinder
  - offene Unterrichtsformen
  - Zähl- und Kardinalzahl werden integriert
- Nachteile des ganzheitlichen Vorgehens:
  - Unterrichtsverlauf ist nicht so gut planbar
  - „Machbarkeit“ wird von vielen Lehrern vor allem für schwache Kinder angezweifelt

Natürliche Zahlen- Jahrgangsstufe 1/2

- Arbeitsmaterialien
  - 20er Rahmen
  - 20er Schiffchen
  - 1000er- Rahmen
  - Mehrsystemblöcke
  - Cuisenairsestäbe
  - Hunderterfeld
  - Hundertertafel

Natürliche Zahlen– Jahrgangsstufe 3/4

- Rahmenlehrplan
  - Zahlenraum bis eine Million (Klasse 3: bis 1000; Klasse 4: bis 1 Million)

- Arbeitsmaterialien
  - 1000er-Buch
  - Mehrsystemblöcke

Natürliche Zahlen– Jahrgangsstufe 5/6

- Rahmenlehrplan
  - **Natürliche** Zahlen, deutlich größer als eine Million

2. Die Bruchzahlen $\mathcal{B}$ bzw. $\mathbb{Q}^+$

- Warum brauchen wir diesen neuen Zahlbereich?
- Erarbeitet in Partnerarbeit Gründe und schreibt diese leserlich auf die ausgeteilten Zettel!
- Bearbeitungszeit: 10min

Bruchzahlen – Gründe zur Einführung

- Messen (Bsp: $\frac{1}{8}$ l Milch, $\frac{2}{5}$ m, ...)
- Verteilen/Unterteilen (Bsp: 3 Pizzas auf 4 Personen)
- Dividieren (Bsp: 8:9 in $\mathbb{N}$ nicht möglich)
- Gleichungslehre (Bsp: Gleichung $4*x=5$ nicht in $\mathbb{N}$ lösbar)
- ….

Bruchzahlen – Definitionen in Schulbüchern

- Beispiel *Mathematik 5 (Volk und Wissen)*:
  „Zur Bezeichnung von Bruchteilen benutzt man Brüche. […] [Sie] werden in der Form $\frac{a}{b}$ geschrieben. Dabei sind a und b nat. Zahlen.“
- Beispiel *Westermann 6 (Westermann)*:
  „Alle Bruchzahlen fasst man zur Menge B der Bruchzahlen zusammen“
- Beispiel *Mathematik 6 (Volk und Wissen)*:
  „Die natürlichen Zahlen bilden eine Teilmenge der gebrochenen Zahlen“

Bruchzahlen – Definitionen in Schulbüchern

- Beispiel *Plus 6.Schuljahr (Schöningh)*:

  „Brüche sind Namen für Zahlen, für Bruchzahlen. Zu jeder Bruchzahl gehören beliebig viele Brüche."

Bruchzahlen – mathematische Definition

- Definition 1:

  Unter einem Bruch $\frac{a}{b}$ verstehen wir das geordnete Paar (a,b) mit a,b $\in \mathbb{N}$

  Wir nennen a den Zähler und b den Nenner des Bruches.

Bruchzahlen – mathematische Definition

- Definition 2:

  Wir nennen zwei Brüche a/b und c/d genau dann äquivalent oder gleichwertig, wenn gilt $a \times d = c \times b$.

  In Zeichen: $(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow a \times d = c \times b$.

- Beispiel: $4/5 \sim 8/10$, da $4 \times 10 = 40 = 5 \times 8$.

Bruchzahlen – mathematische Definition

- Definition 3:

  Die Bruchzahl $\frac{a}{b}$ ist die Klasse aller zu a/b äquivalenten Brüche a'/b'.

  In Kurzform: $\frac{a}{b} = \{a'/b' \mid a',b' \in \mathbb{N}$ und $a \times b' = a' \times b\}$.

- Den Bruch a/b nennen wir einen Repräsentanten oder auch eine Bruchdarstellung der Bruchzahl $\frac{a}{b}$.

Bruchzahlen– Bezeichnung im Vergleich

- Die Menge aller Bruchzahlen bezeichnen wir mit Q^+
- In der Schule werden sie mit $\mathcal{B}$ symbolisiert.

- Was ist eure Meinung zu den verschiedenen Bezeichnungen?

Bruchzahlen– Eigenschaften

Schulbuch	Wissenschaftliche Literatur
Brüche, die auf dem Zahlenstrahl an gleicher Stelle stehen, sind dieselbe Bruchzahl	Jede Bruchzahl hat unendlich viele Repräsentanten
Summe (bzw. Produkte) der Bruchzahlen wieder Bruchzahl	Abgeschlossen bzgl. Addition (und Multiplikation)
Beim Addieren (bzw. Multiplizieren) darfst du die Summanden (bzw. Faktoren) vertauschen	Kommutativgesetz der Addition (bzw. Multiplikation)
Beim Addieren (bzw. Multiplizieren) von 3 Bruchzahlen darfst du mit den ersten beiden oder mit den letzten beiden Summanden (bzw. Faktoren) beginnen.	Assoziativgesetz der Addition (bzw. Multiplikation)

Bruchzahlen– Eigenschaften

Schulbuch	Wissenschaftliche Literatur
Die Zahl 0 (bzw. 1) ist neutrales Element der Addition (bzw. Multiplikation) in $\mathcal{B}$.	O (bzw. 1) ist neutrales Element der Addition (bzw. Multiplikation)
Die natürlichen Zahlen bilden eine Teilmenge der gebrochenen Zahlen.	$(\mathbb{Q}^{+\prime},+,\times,<) \cong (\mathbb{N},+,\times,<)$, wobei $\mathbb{Q}^{+\prime}:=\left\{\frac{a}{1} \middle\vert a \in \mathbb{N}\right\}$
Zwischen zwei verschiedenen Bruchzahlen liegen immer unendlich viele weitere Bruchzahlen.	Bruchzahlen liegen dicht.
In $\mathcal{B}$ hat keine Zahl einen Nachfolger. Es existiert keine kleinste Bruchzahl.	

Bruchzahlen– Eigenschaften

Schulbuch	Wissenschaftliche Literatur
	Für Addition und Multiplikation gelten die Monotoniegesetze
	In $\mathbb{Q}^+$ gilt Kleinerrelation (transitiv und trichotom) & Distributivgesetze

Bruchzahlen– typische Schülerfehler

-
- Vorstellung von Ergebnissen der Rechenoperation ändert sich:
  - Multiplikation: nicht unbedingt Vergrößerung
  - Division: nicht unbedingt Verkleinerung

- Schwierigkeiten bei den Rechenoperationen
  - Addition/ Subtraktion: $\frac{3}{8}+\frac{2}{3}=\frac{5}{13}$
  - Multiplikation: $\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{6}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{18}{10}$; $\frac{2}{3}\times 5=\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15}$
  - Division: $\frac{4}{5}:\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$; $\frac{4}{5}:\frac{2}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}$

Rationale Zahlen– Gruppenarbeit

- Bildet 4 Gruppen und betrachtet die jeweiligen Lehrbücher und den gegebenen Punkten:

1. Wie werden die rationalen Zahlen eingeführt?
2. Welche Rolle spielt der Betrag und wie wird er erklärt?
3. Wie wird die Addition und Subtraktion thematisiert?

Rationale Zahlen– Gruppenarbeit

- Erstellt eine Folie mit den gesammelten Ergebnissen und präsentiert diese euren Kommilitonen.
- Bearbeitungszeit: 20min

Rationale Zahlen– Möglichkeiten in der Schule

- Möglichkeiten der Einführung rationaler Zahlen
  - Spiele, Temperaturen, Kontostände, Meeresspiegel, Geschichte/Jahreszahlen, Zeitverschiebung

- Möglichkeiten der Einführung von Addition und Subtraktion rationaler Zahlen
  - Guthaben/Schulden-Spiel, Spiele am Zahlenstrahl, Pfeildarstellungen, Fahrstuhl

Zahlbereichserweiterung– unter strukturellen Gesichtspunkten

- Was ist euch aufgefallen?
- Was sind überhaupt strukturelle Gesichtspunkte?

  → algebraische Struktur, wie Gruppe, Monoide, Körper, Vektorräume,…

- Zusammenhang:

  Monoide→ Gruppe→ Ring→ Körper

Zahlbereichserweiterung– unter strukturellen Gesichtspunkten

- Was ist $\mathbb{N}$?
- → $(\mathbb{N},+)$ Monoid, keine Gruppe
- → $(\mathbb{N},\times)$ Monoid, keine Gruppe

- Was ist $\mathbb{Q}^+$?
- → $(\mathbb{Q}^+,+)$ Monoid, keine Gruppe
- → $(\mathbb{Q}^+,\times)$ Monoid, abelsche Gruppe
- → $(\mathbb{Q}^+,+,\times)$ kein Ring

- Was ist $\mathbb{Q}$?
- → $(\mathbb{Q},+)$ Monoid, abelsche Gruppe
- → $(\mathbb{Q},\times)$ Monoid, keine Gruppe
- → $(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\times)$ Monoid, Gruppe
- → $(\mathbb{Q},+,\times)$ Ring, Körper

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit und Mitarbeit!

Amrei & Marei