

# Diskrete Geometrie und Visualisierung

## *Teilnehmer:*

Stefanie Cattes	Herder-Oberschule
Benjamin Drost	Heinrich-Hertz-Oberschule
Franz Löchner	Heinrich-Hertz-Oberschule
Ertan Özel	Herder-Oberschule
Julius Seiberl	Georg-Forster-Oberschule
Katja Wolff	Heinrich-Hertz-Oberschule

## *Gruppenleiter:*

Konstantin Poelke, Carsten Lange, Konrad Polthier	Freie Universität Berlin und DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
---------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------

Dieser Kurs soll eine Einführung in Visualisierungstechniken geben. Zunächst werden parametrisierte Kurven betrachtet, mit deren Hilfe viele wichtige Konzepte leicht eingeführt werden können. Im zweiten Abschnitt werden Bezierkurven betrachtet, deren Form sich durch ein Kontrollpolygon leicht bearbeiten, berechnen und parametrisieren lässt. Abschnitt drei behandelt die Parametrisierung von Flächen. Im folgenden vierten Abschnitt wird ein erstaunliches Phänomen beschrieben: Ein Zylinder wird punktweise durch eine triangulierte Fläche approximiert, doch abhängig von der Parameterwahl konvergiert der Flächeninhalt gegen den des Zylinders oder nicht. Zuletzt wird in Abschnitt fünf eine Methode zur Bildverzerrung skizziert, indem wir versuchen zu klären, wie sich effizient Gitter deformieren lassen und welche Abbildungen sich dafür eignen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Parametrisierte Kurven</b>	<b>91</b>
1.1	Definition . . . . .	91
1.2	Der (Einheits-)Kreis . . . . .	91
1.3	Das Unendlichzeichen . . . . .	92
1.4	Die Sanduhr . . . . .	93
1.5	Geschwindigkeiten, die erste Ableitung und Tangentialvektoren . . . .	93
1.6	Bogenlänge . . . . .	94
1.7	Die Betragsfunktion . . . . .	95
1.8	Zykloide . . . . .	96
1.9	Epizykloide . . . . .	97
1.10	Hypozykloide . . . . .	98
<b>2</b>	<b>Bezierkurven</b>	<b>99</b>
2.1	Der de Casteljau-Algorithmus . . . . .	99
2.2	Bernstein-Polynome . . . . .	100
<b>3</b>	<b>Parametrisierte Flächen</b>	<b>102</b>
3.1	Kugeloberfläche . . . . .	102
<b>4</b>	<b>Von parametrisierten Flächen zur Schwarz'schen Laterne</b>	<b>104</b>
4.1	Die Schwarz'sche Laterne . . . . .	105
4.2	Mantelfläche der Schwarz'schen Laterne . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Bilderverzerrung</b>	<b>107</b>
5.1	Normen . . . . .	107
5.2	„Energie“-Funktionen . . . . .	108
5.3	Die Abbildung . . . . .	108
5.4	Gitternetz . . . . .	109

# 1 Parametrisierte Kurven

## 1.1 Definition

Parametrisierte Kurven laufen in Abhängigkeit eines Parameters  $t$ , welcher nicht im Koordinatensystem eingezeichnet ist. Sie entsprechen folgender Definition:

$$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$$

Ein Beispiel für eine Parametrisierung einer Kurve ist die Parametrisierung von  $g(x) = x^2$

Diese Kurve liegt im  $\mathbb{R}^2$ , sodass die beiden Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  die x- bzw. y-Koordinate unserer Kurve darstellen.

Die x-Koordinate wird dabei einfach mit  $f_1(t) = t$ , die y-Koordinate mit  $f_2(t) = t^2$  beschrieben.

Die Parameterdarstellung lautet also für  $t \in \mathbb{R}$ :

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

## 1.2 Der (Einheits-)Kreis

Da der Einheitskreis die Kreisfunktionen Sinus und Cosinus beschreibt, ist es nur logisch, dass Sinus und Cosinus in der entsprechenden parametrisierten Darstellung enthalten sind. Der Cosinus ist die Projektion auf die x-Achse und bestimmt deshalb die x-Koordinate. Er entspricht  $f_1(t)$ . Der Sinus ist die Projektion auf die y-Achse und bestimmt deshalb die y-Koordinate. Er entspricht  $f_2(t)$ .

Die Parameterdarstellung eines Kreises ist also folgende:

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \in [0; 2\pi].$$

Will man noch einen Radius ungleich Eins berücksichtigen, so tritt dieser einfach

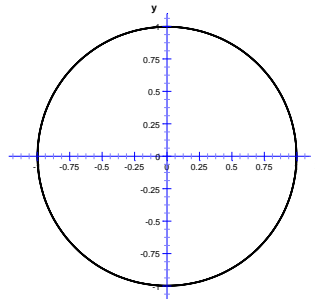


Abbildung 1: Der Einheitskreis

als Vorfaktor auf:

$$t \rightarrow r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \in [0; 2\pi].$$

### 1.3 Das Unendlichzeichen

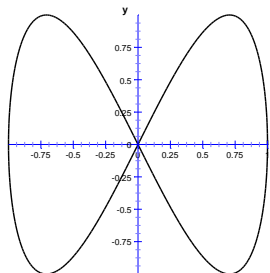


Abbildung 2: Das „Unendlichzeichen“

Hierbei hatten wir zwei Ansätze. Der erste war, das Zeichen einfach durch Aneinanderreihung zweier Kreise zu erhalten. Dazu stellten wir als erstes fest, dass wir, um den Kreis um Eins nach rechts zu verschieben, einfach nur eine Eins zur x-Koordinate addieren mussten, da ja jeder Punkt auf der selben Höhe bleibt und sich nur parallel zur x-Achse verschiebt. Für die Verschiebung nach links muss mit der selben Begründung eine Eins von der x-Koordinate subtrahiert werden. Also:

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(t) + 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \text{ für } t \in [-\pi; \pi]$$

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \text{ für } t \in [\pi; 3\pi]$$

Die zweite Version gründet sich darauf, dass zum Erhalten der Kurve die y-Koordinate doppelt so schnell laufen muss, wie die x-Koordinate. Während also der Cosinus nur einmal alle Werte zwischen  $-\pi$  und  $\pi$  durchläuft muss der Sinus die Werte zwischen  $-\pi$  und  $3\pi$  durchlaufen. Also:

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

## 1.4 Die Sanduhr

Um nun von der vorangegangenen Figur auf eine Sanduhr zu kommen, muss man die Figur an der Identität spiegeln, was mit der Parameterdarstellung besonders einfach geht. Man muss einfach nur die Komponenten von x- und y-Eintrag vertauschen. Ausgehend von der zweiten Version also:

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

## 1.5 Geschwindigkeiten, die erste Ableitung und Tangentialvektoren

Da unsere Kurve von einem im Koordinatensystem nicht vorhandenen Parameter  $t$  abhängt, können wir diesen auch als die Zeit ansehen, die aufgewendet wird um die Kurve entlang zu gehen. Wenn  $t=0$  ist, so läuft man also gerade los, während zum Beispiel der Punkt bei  $t=1$  den Ort beschreibt, bei dem man sich zur Zeit 1 befindet. Man kann bestimmte Kurven auch mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten entlanglaufen. In Abschnitt 1.3 hat man sehr schön gesehen, wie eine Verdopplung des pro Zeiteinheit zurückgelegten Weges zu einer Stauchung der Kurve führte. Würde man allerdings  $f_1$  und  $f_2$  um den selben Faktor beschleunigen oder verlangsamen, so würde man z.B. den Kreis in der bisherigen Zeit einfach nur mehrmals oder nur teilweise durchlaufen.

Ganz physikalisch gesprochen kann man diese Geschwindigkeit auch als Vektor auffassen. Dieser sogenannte Tangentialvektor würde dann an den entsprechenden Kurvenpunkt angesetzt. Betrachtet man die Kurve des Unendlichzeichens so sieht man, dass am Punkt  $(0|0)$  gleich zwei Tangentialvektoren anliegen, da wir diesen Punkt zwei Mal mit unserer Kurve treffen, was nicht an der Periodizität von Sinus und Cosinus liegt, und auch nicht an der Länge des Intervalls.

Die Geschwindigkeit ist außerdem der Ort (in unserem Fall die Parameterdarstellung der Kurve) abgeleitet nach der Zeit (bei uns der Parameter).

Am Beispiel unseres Unendlichzeichens sähe diese Ableitung wie folgt aus:

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\cos(t) \\ \frac{d}{dt}\sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Man kann übrigens auch hier äquivalent zu einer klassischen Funktion einen Differenzenquotienten aufstellen. Während es bei Funktionen dabei nämlich darum geht, wie sich der Funktionswert verändert, wenn man den x-Wert minimal variiert, geht es bei Kurven darum, wie sich der Ort ändert, wenn man den Parameter minimal variiert.

Also:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right)$$

Verallgemeinert lautet der Ausdruck so:

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \text{ der Ort zum Zeitpunkt } t$$

$$\frac{d}{dt}\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}f_1(t) \\ \frac{d}{dt}f_2(t) \end{pmatrix}, \text{ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt } t$$

Diese Darstellung gibt uns, da es der Vektor der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  ist, sowohl die Richtung (Richtung des Vektors), als auch die Größe (Länge des Vektors) der Geschwindigkeit an. Wollen wir allerdings nur die Geschwindigkeit, also die Länge des Vektors, haben, so können wir diese über den Satz des Pythagoras bestimmen.

$$\left| \frac{d}{dt}\gamma(t) \right| = \sqrt{\left(\frac{d}{dt}f_1(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}f_2(t)\right)^2}$$

Natürlich ist dabei auch eine Geschwindigkeit von Null möglich. Zu einem solchen Zeitpunkt bleibt der Punkt sozusagen 'stehen'.

**Definition 1.1** Eine Kurve  $\gamma$  heißt regulär, falls  $\frac{d}{dt}\gamma \neq 0$  für alle Zeitpunkte  $t$  gilt.

## 1.6 Bogenlänge

Ebenfalls äquivalent zur klassischen Funktion kann man die Bogenlänge einer Kurve bestimmen. Diese ist bestimmt durch das Integral über die Geschwindigkeiten im

Intervall  $[a; b]$ .

Also

$$\int_b^a \left( \left| \frac{d}{dt} \gamma(t) \right| \right) = \int_b^a \left( \sqrt{\left( \frac{d}{dt} f_1(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} f_2(t) \right)^2} \right).$$

Wie man leicht erkennt, führt diese Schreibweise für Parameterdarstellungen einfacher Funktionen (siehe Beispiel  $x^2$ ) zu der üblichen Bogenlänge, da ja  $f_1(t) = x$  und demnach  $\frac{d}{dt} f_1(t) = 1$  ist.

## 1.7 Die Betragsfunktion

Die Betragsfunktion ist bekanntermaßen an der Stelle  $x = 0$  nicht differenzierbar, da die Funktion erst mit der konstanten Steigung von  $-1$  fällt, und nach der Null sprunghaft zu einer Steigung von  $+1$  wechselt.

In der Parameterdarstellung kann man dieses Problem umgehen. Dort muss die entsprechende Kurve nämlich nur aus zwei gleichen Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  bestehen, wobei  $f_2$  den Betrag von  $f_1$  beschreibt. Dadurch können die Funktionen so gewählt werden, dass kein sprunghafter Steigungswechsel stattfindet, sondern man sozusagen vor der Ecke langsamer wird, um danach wieder zu beschleunigen. Eine mögliche Darstellung dafür wäre diese:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ |t^3| \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt} \gamma(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{t^3}{|t^3|} \cdot 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Zur näheren Erläuterung:

Annäherung von links:

$$|t^3| = -t^3 \text{ für } t < 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{t^3}{|t^3|} \cdot 3t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{t^3}{-t^3} \cdot 3t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -3t^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Annäherung von rechts:

$$|t^3| = t^3 \text{ für } t > 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{t^3}{|t^3|} \cdot 3t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{t^3}{t^3} \cdot 3t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die klassische Betragsfunktion hingegen sieht so aus:

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt} f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t}{|t|} \end{pmatrix}$$

Sie liefert folgende Ergebnisse:

Annäherung von links:

$$|t| = -t \text{ für } t < 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t}{|t|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t}{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Annäherung von rechts:

$$|t| = t \text{ für } t < 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t}{|t|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hier sind die Ergebnisse in beiden Fällen konstant.

Die Potenzen in der ersten Darstellung sorgen dafür, dass die Ableitung gegen Null geht.

Wie man also sieht, muss man sich bei der Arbeit mit Kurven von dem üblichen Gedanken abwenden, differenzierbare Funktionen seien „rund“. Auch eine eckige Kurve wie die des Betrages ist differenzierbar.

## 1.8 Zykloide

Zykloide sind sogenannte Abrollfiguren. Sie beschreiben die Kurve, die ein Punkt beschreibt, der auf einem Kreis mit Radius  $r$  liegt und eine bestimmte Bahn „entlangrollt“.

Dazu versuchten wir zuerst einmal, die Bahn des Punktes auf dem Kreis zu beschreiben, ohne den Kreis dabei auch noch fortzubewegen. Als erstes wurde zum Erreichen der benötigten Rechtsdrehung die folgende Version aufgestellt:

$$r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Sie begründet sich darin, dass der Cosinus zwar seiner alten Bahn folgt, der Sinus jedoch in negative Richtung wandert. Allerdings würde der Kreispunkt dann nicht „unten“, sondern „rechts“ am Kreis beginnen. Um „unten“ zu beginnen, müsste man das ganze um  $-\frac{\pi}{2}$  verschieben, was dank der Periodizität zu folgender korrekten Darstellung führt:

$$r \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Um nun noch die Rechtsdrehung einzubinden, müssen wir die Bahn des Mittelpunktes betrachten. Diese wird einfach durch  $t \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$  beschrieben und ist eine Parallele zu unserer Geraden.

Durch Addition können wir diese Kräfte nun überlagern und so die Bewegung des Punktes bestimmen:

$$\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$



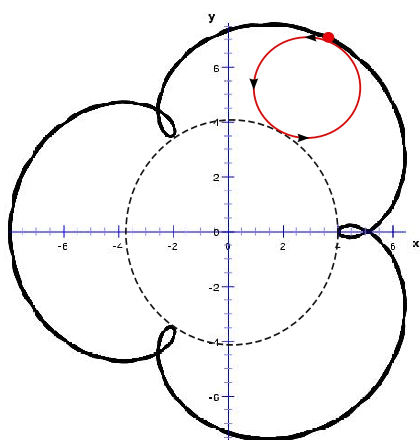
Allerdings stellt sich hierbei die Frage, warum man nicht einfach  $5t$  schreiben könnte. Dies ließ sich jedoch einfach damit begründen, dass sich dann der Mittelpunkt im Verhältnis zum Rad viel zu schnell fortbewegen würde. Nichtsdestotrotz fiel auf, dass unser Vorfaktor Eins nicht unbedingt richtig sein müsste, da ja das Rad eine andere Strecke zurücklegt als der Kreismittelpunkt. Während letzterer nämlich zum Beispiel bei  $t = 2\pi$  die Strecke  $2\pi$  zurücklegt, ist der Kreispunkt gerade eine Strecke von  $2\pi \cdot r$  weit gekommen, da er ja gerade einmal um den Kreis gewandert ist. Dementsprechend muss die Geschwindigkeit des Mittelpunktes angepasst werden. Dazu bilden wir das Verhältnis aus Umfang des Kreises und Bogenmaß,  $\frac{2\pi \cdot r}{2\pi}$ . Der benötigte Faktor ist also  $r$ .

Die exakte Form lautet also

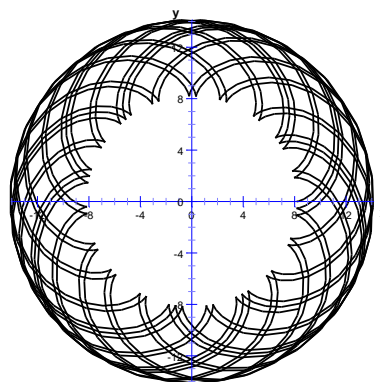
$$\begin{pmatrix} rt \\ r \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

## 1.9 Epizykloide

Eine weitere mögliche Abrollfigur beschreibt die Bahn eines Punktes auf einem Kreis mit Radius  $r$  der auf einem größeren Kreis mit Radius  $R$  entlang rollt, wobei ( $R \geq r$ ).



(a) Epizykloide(schematisch)



(b) Epizykloide mit irrationaler Phase

Abbildung 3: Epizykloide

Als erstes stellten wir hierzu wieder die Formel für die Bahn des Punktes auf dem kleinen Kreis dar, sollte sich der Kreis nicht fortbewegen. Da wir sozusagen „links“ an unserem Kreis anfangen, müssen wir die „normale“ Form anpassen. Die passende Formel lautet also wie folgt:

$$r \cdot \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Die Bahn des Mittelpunktes wird hierbei jedoch nicht einfach als Gerade beschrieben, sondern ist die Bahn eines Kreises mit Radius  $(R + r)$ . Sie lautet also

$$(R + r) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Auch hierbei muss eine Anpassung der Geschwindigkeit stattfinden. Und zwar durch das Verhältnis aus Umfang des kleinen Kreises und Mittelpunktsbahn:

$$\frac{2\pi \cdot (R + r)}{2\pi \cdot r} = \frac{R + r}{r} = \frac{R}{r} + 1.$$

Diese Variation muss nun als verändernder Faktor für die Geschwindigkeit der Kreisbahn auftreten. Nach Überlagerung der Kräfte lautet die komplette Formel folgendermaßen:

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} (R + r) \cos(t) - r \cdot \cos\left(\left(\frac{R}{r} + 1\right) \cdot t\right) \\ (R + r) \sin(t) - r \cdot \sin\left(\left(\frac{R}{r} + 1\right) \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

## 1.10 Hypozykloide

Eine weitere sehr ähnliche Abrollfigur beschreibt die Bahn eines Punktes auf einem Kreis mit Radius  $r$ , der dieses Mal *in* einem größeren Kreis mit Radius  $R$  entlang rollt ( $R \geq r$ ).

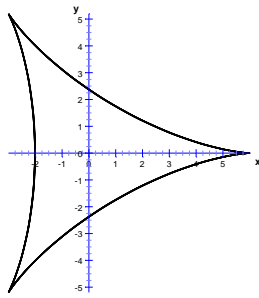
Die Bahn des Punktes auf dem kleinen Kreis lässt sich in diesem Fall durch eine Abwandlung der Formel aus 1.1 da wir zwar rechts starten aber im Uhrzeigersinn drehen.

Damit kommt man auf folgende Formel:

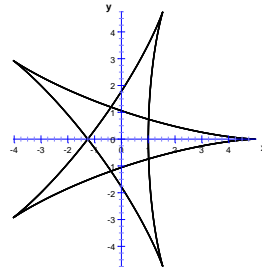
$$r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Die Bahn des Mittelpunktes folgt hierbei analog zu den Epizykloiden einer Kreisbahn, diesmal im inneren des Kreises mit dem Radius  $(R - r)$ . Die Gleichung lautet also

$$(R - r) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$



(a)  $R=6, r=2$



(b)  $R=5, r=2$

Abbildung 4: Hypozykloide mit unterschiedlichen Radien-Verhältnissen

Wieder muss eine Anpassung der Geschwindigkeit stattfinden. Der Faktor hierbei lässt sich wie bei den Epizykloiden durch das Verhältnis aus Umfang des kleinen Kreises und Mittelpunktsbahn berechnen:

$$\frac{2\pi \cdot (R - r)}{2\pi \cdot (r)} = \frac{R - r}{r} = \frac{R}{r} - 1.$$

Die komplette Formel lautet nun:

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} (R - r) \cdot \cos(t) - r \cdot \cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right) \cdot t\right) \\ (R - r) \cdot \sin(t) - r \cdot \sin\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right) \cdot t\right) \end{pmatrix}.$$

## 2 Bezierkurven

Da man für die Bildbearbeitung die vorangegangenen, komplizierten Kurven nur schlecht benutzen kann, benötigt man einfachere Kurven, die sich kontrolliert verändern lassen. Bezierkurven haben sich dabei als besonders nützlich erwiesen. Durch bestimmte Stütz- bzw. Fixpunkte können sie auf zwei verschiedenen Arten erzeugt werden, die im Folgenden erläutert werden.

### 2.1 Der de Casteljau-Algorithmus

Das erste Verfahren arbeitet mit dem Algorithmus von de Casteljau und ist konstruktiv. Bei diesem Algorithmus sind  $n + 1$  Punkte  $P_0, \dots, P_n$  (die wir die Punkte der 0. Generation nennen) und ein  $z \in [0; 1]$  gegeben.  $z$  gibt dabei ein Verhältnis an, in dem die Strecken  $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$  jeweils später geteilt werden sollen. Bei

dieser Teilung erhält man nun  $n - 1$  neue Punkte (der 1. Generation). Auf diese Punkte wendet man das Verfahren erneut an und erzeugt so Punkte der 2., 3., ...,  $n$ -ten Generation, wobei zuletzt nur noch ein einziger Punkt übrig bleibt. Das ganze lässt sich mit folgendem Pseudocode beschreiben:

```

1  For  $i = 0, \dots, n$ 
2     $P_i^0 := P_i$ 
3  For  $j = 1, \dots, n$ 
4    For  $i = 0, \dots, (n - j)$ 
5       $P_i^j := (1 - z) \cdot P_i^{j-1} + z \cdot P_{i+1}^{j-1}$ 
6  Return  $P_0^n$ 

```

In Zeile 1 und 2 werden die Ursprungspunkte formgerecht umbenannt. In der Zeile 3 zählt man mit dem Laufindex  $j$  die jeweiligen Generationen. Da in jeder Generation ein Punkt weniger vorhanden ist, gibt es dementsprechend genau  $n$  Generationen.  $j$  läuft daher von 1 bis  $n$ . In Zeile 4 läuft der Index  $i$  von 0 bis  $n - j$ , was die jeweiligen Anzahlen an Punkten in der Generation  $j$  sind. Die wichtigste Zeile ist die fünfte: Jeder neue Punkt  $P_i^j$  entsteht auf der Strecke zwischen zwei Punkten  $P_i^{j-1}$  und  $P_{i+1}^{j-1}$  der vorangegangenen Generation. Man erzeugt ihn, indem man die Differenz  $P_i^{j-1} - P_{i+1}^{j-1}$  (also die Strecke zwischen beiden Punkten), multipliziert mit  $z$ , zu dem Punkt  $P_i^{j-1}$  addiert:

$$P_i^j = P_i^{j-1} + z \cdot (P_i^{j-1} - P_{i+1}^{j-1}) = (1 - z) \cdot P_i^{j-1} + z \cdot P_{i+1}^{j-1}.$$

In der 6. Zeile wird dann schließlich der errechnete letzte Punkt ausgegeben. Für jedes  $z$ , das man zu den gegebenen Punkten wählt, entsteht ein anderer Punkt auf der Kurve. So lässt sich die Kurve letztendlich konstruieren.

## 2.2 Bernstein-Polynome

Mit dem zweiten Verfahren lässt sich die Bezierkurve berechnen.

Zunächst betrachten wir das Problem für vier Punkte  $P_0, P_1, P_2, P_3$  für  $z \in [0; 1]$ . Wir errechnen die Punkte der ersten Generation wie unter 2.1 angegeben.

$$\begin{aligned} P_0^1 &= (1 - z) \cdot P_0 + z \cdot P_1 \\ P_1^1 &= (1 - z) \cdot P_1 + z \cdot P_2 \\ P_2^1 &= (1 - z) \cdot P_2 + z \cdot P_3 \end{aligned}$$

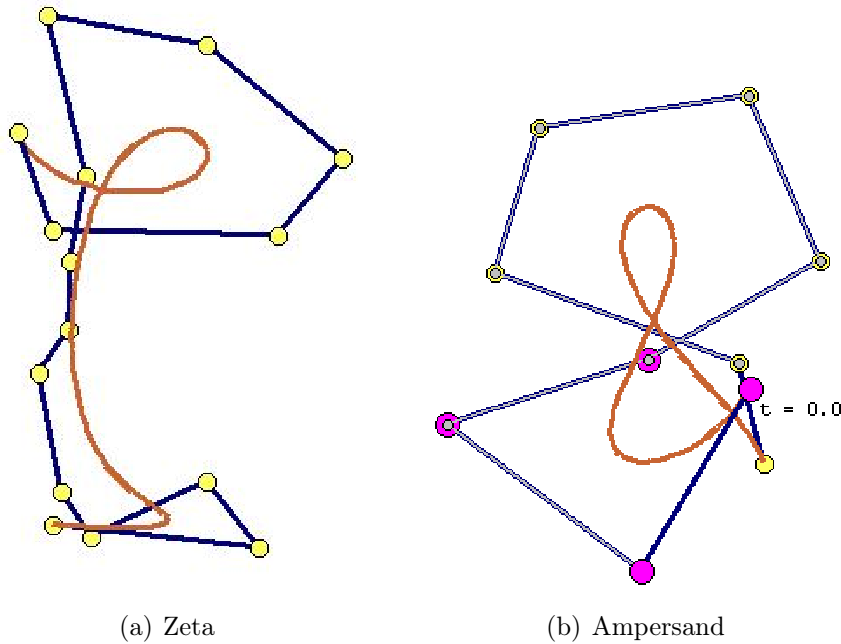


Abbildung 5: Design mit Bezierkurven

Aus denen lassen sich wiederum die Punkte der zweiten Generation errechnen:

$$\begin{aligned}
 P_0^2 &= (1 - z) \cdot P_0^1 + z \cdot P_1^1 \\
 &= (1 - z)((1 - z) \cdot P_0 + z \cdot P_1) + z((1 - z) \cdot P_0 + z \cdot P_1) \\
 &= (1 - z)^2 \cdot P_0 + 2(1 - z)z \cdot P_1 + z^2 \cdot P_2 \\
 \text{Analog } P_1^2 &= (1 - z)^2 \cdot P_1 + 2(1 - z)z \cdot P_2 + z^2 \cdot P_3
 \end{aligned}$$

Nun wird der letzte Punkt aus diesen errechnet:

$$\begin{aligned}
 P_0^3 &= (1 - z) \cdot P_0^2 + z \cdot P_1^2 \\
 &= (1 - z)((1 - z)^2 \cdot P_0 + 2(1 - z)z \cdot P_1 + z^2 \cdot P_2) + z((1 - z)^2 \cdot P_1 + 2(1 - z)z \cdot P_2 + z^2 \cdot P_3) \\
 &= (1 - z)^3 \cdot P_0 + 3(1 - z)^2 z \cdot P_1 + 3(1 - z)z^2 \cdot P_2 + z^3 \cdot P_3 \\
 &= \sum_0^3 \binom{3}{i} (1 - z)^{3-i} z^i \cdot P_i
 \end{aligned}$$

Dies lässt sich nun auf eine beliebige Anzahl von Punkten verallgemeinern:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1 - z)^{n-i} z^i \cdot P_i$$

Dabei nennt man  $\binom{n}{i}(1-z)^{n-i}z^i$  das  $i$ -te Bernsteinpolynom vom Grad  $n$ .

### 3 Parametrisierte Flächen

Neben den Kurven kann man auch Flächen parametrisieren und im Raum darstellen. Hierfür ist es erforderlich, einen zweiten Parameter einzuführen.

Der Definitionsbereich ist diesmal z.B. ein (kartesisches) Produkt zweier Intervalle, also eine Fläche.

#### 3.1 Kugeloberfläche

Wir versuchen nun, eine Kugeloberfläche zu parametrisieren. Unser erster Versuch führte zu

$$(t, u) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \sin(u) \end{pmatrix}$$

mit  $t \in [0, 2\pi]$  und  $u \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Das Resultat ist jedoch eine Zylinderoberfläche.

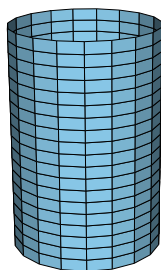


Abbildung 6: Parametrisierter Zylinder

Dies liegt daran, dass der Radius des Kreises, welcher auf der x-y-Ebene liegt, bei uns fest ist, bei der Kugel jedoch natürlich abhängig vom 2. Parameter variiert.

$$(t, u) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot \cos(u) \\ \sin(t) \cdot \cos(u) \\ \sin(u) \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [0; 2\pi] \text{ und } u \in [\pi/2, \pi/2]$$

Mithilfe einer Dreh-Matrix sind wir auf eine 2. Möglichkeit gekommen, die Kugeloberfläche darzustellen.

Dabei drehen wir einen in der x-z-Ebene liegenden Halbkreis um die z-Achse.

Die Änderung der kanonischen Einheitsvektoren ist im Folgenden beschrieben:

$$e_1 \mapsto \tilde{e}_1 := \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 \mapsto \tilde{e}_2 := \begin{pmatrix} -\sin(v) \\ \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 \mapsto \tilde{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Drehmatrix ist dann:  $\mu(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$

$$\text{Halbkreis: } G_H = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ 0 \\ \sin(u) \end{pmatrix}$$

Nun muss der Graph, welcher den Halbkreis auf der x-z-Ebene darstellt, rotieren bzw. mit der Drehmatrix multipliziert werden.

$$\begin{aligned} \mu \cdot G_H &= \begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(u) \\ 0 \\ \sin(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(v) \cdot \cos(u) - \sin(v) \cdot 0 + 0 \cdot \sin(u) \\ \sin(v) \cdot \cos(u) + \cos(v) \cdot 0 + 0 \cdot \sin(u) \\ 0 \cdot \cos(u) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \sin(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u) \cdot \cos(v) \\ \cos(u) \cdot \sin(v) \\ \sin(u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Die Kugeloberfläche ist also } \begin{pmatrix} \cos(u) \cdot \cos(v) \\ \cos(u) \cdot \sin(v) \\ \sin(u) \end{pmatrix}.$$

Ableiten kann man die Koordinatenfunktionen der Fläche, indem man partiell ableitet, d.h. ein Parameter wird als Konstante betrachtet und nach dem anderen Parameter wird abgeleitet:

**Definition 3.1** Für eine Funktion  $g : I \times J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$(u, v) \mapsto g(u, v)$  bezeichnet man mit

$$\frac{\partial}{\partial u} g(u, v) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(u+h, v) - g(u, v)}{h} \text{ bzw.}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} g(u, v) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(u, v+h) - g(u, v)}{h}$$

die partielle Ableitung in u- bzw. v-Richtung, sofern der Limes existiert.

Probleme können auftreten, wenn die Fläche einen „spitzen Gipfel“ hat. Die Ableitung an einem bestimmten Punkt spannt unter gewissen Voraussetzungen eine Ebene

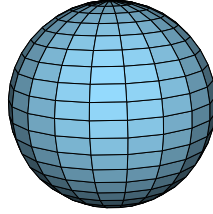


Abbildung 7: Kugeloberfläche

auf, welche durch die Bilder der Einheitsvektoren zu jedem Punkt  $(u, v)$  beschrieben werden kann. Dazu wurde das sogenannte „Totale Differential“ eingeführt. Es hat folgende Form:

$$Df := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f_1 & \frac{\partial}{\partial v} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial u} f_2 & \frac{\partial}{\partial v} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial u} f_3 & \frac{\partial}{\partial v} f_3 \end{pmatrix}.$$

Die bekannten partiellen Ableitungen ergeben sich durch Multiplikation mit den Einheitsvektoren  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$\frac{\partial}{\partial u} f|_{(u,v)} = Df|_{(u,v)} \cdot e_1$$

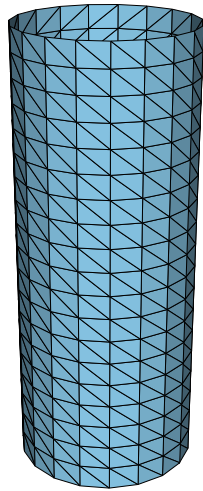
und

$$\frac{\partial}{\partial v} f|_{(u,v)} = Df|_{(u,v)} \cdot e_2.$$

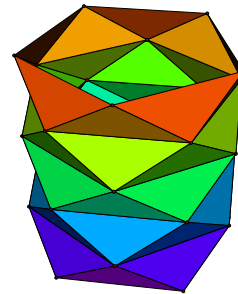
## 4 Von parametrisierten Flächen zur Schwarz'schen Laterne

Um eine parametrisierte Fläche zu diskretisieren (damit sie etwa mit dem Computer visualisiert werden kann), wird die Fläche in der Regel trianguliert, d.h. durch Dreiecke angenähert. Im Folgenden wird die Triangulierung an einem Kreiszyylinder verdeutlicht. Der Zylinder wird im ersten Schritt in  $k$  gleich hohe Scheiben mit Höhe  $H/k$  zerlegt, wobei  $H$  die Gesamthöhe angibt. Die Kreisfläche jeder Scheibe wird





(a) diskretisierter Zylinder



(b) Schwarz' Laterne

Abbildung 8: Diskretisierung von Flächen durch Triangulierung

dann mit einem regelmäßigen  $n$ -Eck angenähert. Schließlich werden die Eckpunkte der  $n$ -Ecke mit Dreiecken verbunden.

#### 4.1 Die Schwarz'sche Laterne

Die Schwarz'sche Laterne, benannt nach dem Mathematiker Schwarz, geht von einer weiteren Methode zur Annäherung eines Zylinders aus und zeigt dabei ein verblüffendes Resultat. Der Unterschied zur ersten Vorgehensweise besteht in der Anordnung der  $n$ -Ecke untereinander: Die regelmäßigen Vielecke stehen diesmal verdreht zueinander.

#### 4.2 Mantelfläche der Schwarz'schen Laterne

Die Besonderheit der Figur entsteht bei Annäherung der diskreten Dreiecke zu einem runden Kreiszyylinder, welche auf zwei Wege erreicht werden kann. Zum einen kann die Anzahl  $k$  der Scheiben gegen unendlich divergieren, andererseits kann auch die Eckenzahl jedes  $n$ -Ecks divergieren.

Gegeben:

- $k$  Anzahl der Scheiben
- $n$  Anzahl der Ecken jedes Vielecks

- $H$  Höhe des Zylinders

In jeder der  $k$  Scheiben befinden sich  $2n$  kongruente Dreiecke; der Flächeninhalt jedes Dreiecks lässt sich mit  $\frac{1}{2} \cdot$  Grundseite  $g \cdot$  Höhe  $h$  berechnen. Die Grundseite entspricht der Länge einer Seite eines regelmäßigen  $n$ -Ecks, ausgedrückt als:

$$g = 2r \sin(\pi/n).$$

Der Satz des Pythagoras liefert nun die Höhe  $h$  des Dreiecks. Während das eine Vieleck mit einer Ecke die Kreislinie auf dem Zylinder berührt, beschreibt die darüber liegende Kante eine Sehne des darüberliegenden Bogens. Der Abstand  $b$  dieser Sehne zur Kreislinie ergibt sich zu:

$$b = r(1 - \cos(\pi/n)).$$

Somit gilt für die Höhe des Dreiecks:

$$h = \sqrt{b^2 + (H/k)^2} = \sqrt{r^2(1 - \cos(\pi/n))^2 + (H/k)^2}.$$

Man berechnet die gesamte Mantelfläche zu:

$$A_{Zylinder} = 2nk \cdot r \sin(\pi/n) \cdot \sqrt{r^2(1 - \cos(\pi/n))^2 + (H/k)^2}.$$

Für  $k \rightarrow \infty$  läuft die Mantelfläche gegen  $\infty$ , da der Term im Wurzelargument gegen einen festen Wert konvergiert, während der Faktor vor der Wurzel gegen  $\infty$  divergiert.

Im Gegensatz dazu konvergiert die Mantelfläche  $A_{Zylinder}$  gegen den Flächeninhalt des angenäherten Zylinders. Mit der Regel von de L'Hospital gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin(\pi/n) &= \pi \\ \lim_{n \rightarrow \infty} r^2(1 - \cos(\pi/n))^2 + (H/k)^2 &= (H/k)^2 \end{aligned}$$

Sogar für den Fall, dass beide Variablen gegen  $\infty$  laufen, wobei  $k$  langsamer gegen  $\infty$  strebt als  $n^2$ , in  $O$  - Notation geschrieben als  $k \in o(n^2)$ .

Beweis:

Man definiert sich die Abhängigkeit von  $k$  zu  $n$  mit  $k(n)$  und schätzt das Wachstum von dieser Funktion ab. Da

$$\begin{aligned} &2rnk(n) \sin(\pi/n) \sqrt{r^2(1 - \cos(\pi/n))^2 + \left(\frac{H}{k(n)}\right)^2} \\ &= 2rn \sin(\pi/n) \sqrt{r^2k(n)^2(1 - \cos(\pi/n))^2 + H^2} \end{aligned}$$

gilt, folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k(n)(1 - \cos(\pi/n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} k(n) \left( - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2i} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k(n) \frac{\pi^2}{2n^2}$$

Der letzte Grenzwert ist genau dann Null, wenn  $k(n) \in o(n^2)$ . Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{r^2 k(n)^2 (1 - \cos(\pi/n))^2 + H^2} = H$$

und damit konvergiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2rnk(n) \sin(\pi/n) \sqrt{r^2 (1 - \cos(H/k))^2 + (H/k(n))^2} = 2\pi rH.$$

## 5 Bilderverzerrung

Zu einer der Anwendungen im Bereich der diskreten Geometrie gehört die Bildverarbeitung. Hier im speziellen betrachten wir die Verzerrung von dergleichen. Bilder bestehen je nach Auflösung aus einer bestimmten Anzahl an Bildpunkten (Pixel). Wir wollen mit unserer Methode einige dieser Punkte zu Kontrollpunkten bestimmen. Diese können zum Beispiel per Maus verschoben werden. Die anderen Bildpunkte rundherum sollen daraufhin "glatt" mit verzerrt werden. Die anderen unbewegten Kontrollpunkte jedoch sollen so beibehalten werden, wie sie sind.

### 5.1 Normen

Für diese Methode müssen wir uns vorerst klar darüber werden, wie wir Längen messen oder Abstände definieren. Als Beispiel sei hier der Abstand über den Pythagoras erwähnt

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Wir erwarten von den Längenmessungsarten folgende Eigenschaften:

- (A)  $Abstand(P; Q) = 0 \Rightarrow P = Q$
- (B)  $Abstand(P; Q) \leq Abstand(P; R) + Abstand(R; Q)$
- (C) Skalierbarkeit:  $Abstand(sP; sQ) = |s| * Abstand(P; Q)$ ,

außerdem sollten die Längen stets nicht negativ sein.

Das gleiche können wir auch für den Vektor zwischen den Punkten formulieren.

Eine Längenmessung, die diese Eigenschaften erfüllt, nennen wir Norm. Neben dem oben benannten euklidischen Abstand sei an dieser Stelle noch eine weitere Norm vorgestellt:

## Die Manhattan-Norm

Bezogen auf die rechtwinklige Siedlungsstruktur des Ortsteils von New York ist der Abstand zweier Punkte nicht unbedingt die direkte Streckenlänge zwischen ihnen (wie beim euklidischen), sondern die Summe aus x-Abstand und y-Abstand:

$$\left\| \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} \right\|_M = |P_x - Q_x| + |P_y - Q_y|.$$

## 5.2 „Energie“-Funktionen

Für unsere "Glattheit" brauchen wir nun eine bestmögliche Approximation (Annäherung). Hierzu verwenden wir sogenannte Energiefunktionen  $E(x) = \|x - z\|$ , deren Begriff aus der Physik vielleicht bekannt ist. Hiervon versuchen wir das Minimum zu erreichen.  $z$  ist hierbei das Objekt, z.B. ein Punkt, zu dem der kürzeste Normabstand gesucht wird. Das merken wir uns am besten erst einmal.

## 5.3 Die Abbildung

Während wir die Kontrollpunkte durch eine affine Abbildung (also Spiegelung, Rotation und Translation) verschieben, müssen wir auch für jeden anderen Punkt eine Abbildung finden, die dann diesen Punkt "glatt" mitverzerrt. Wir nennen diese einfach mal  $\alpha_x$  für jeden der Punkte. Diese sollte auch affin sein, denn diese sind ganz nett durch Matrizen und Vektoren beschreibbar:

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix},$$

wobei U der neue Bildpunkt und V der vergangene, die abcd-Matrix für Rotation und Spiegelung und das additive t für die Verschiebung verantwortlich ist.

Um nun eine schön "glatte" Abbildung zu finden, suchen wir das Minimum folgender Energiefunktion:

$$E(\alpha_x) = \sum_{i=1}^n G * \|\alpha_x(P_i) - Q_i\|,$$

mit  $\alpha_x$  auf  $P_i$  (die Ausgangskontrollpunkte) angewendet,  $Q_i$  als die wirklich abgebildeten Kontrollpunkte und G als Gewicht für die Beibehaltung unveränderter Kontrollpunkte. Für G gibt es folgende Möglichkeit:

$$G = \frac{1}{\|P_i - x\|^c} \text{ mit } c \geq 1$$

Sollte  $x$  nun ein  $P_i$  sein, wird  $G$  unendlich groß. Zur Minimierung der Energiefunktion muss also  $\alpha_{P_i}(P_i) - Q_i = 0$  sein. Das heißt  $\alpha_{P_i}$  bildet  $P_i$  wieder auf  $Q_i$  ab, was wir erreichen wollten.

Wir können nun ein Minimum der Energiefunktion ermitteln. Dies ist auf Dauer beziehungsweise bei komplizierten Normen kein Zuckerschlecken, aber es funktioniert. Wir können allerdings etwas Beschleunigung in unser System bringen.

## 5.4 Gitternetz

Wir nutzen die Möglichkeit eines Gitternetzes, um weniger Abbildungen aus Energiefunktionen herleiten zu müssen. Im Grunde suchen wir jetzt nur noch das Minimum der Abbildungsenergiefunktionen für die Gitternetzpunkte. Alle Punkte auf den Gitternetzlinien werden durch die zwei jeweiligen Eckpunkte der Strecke interpoliert. Die restlichen Punkte können ebenso ihre Abbildung durch die Interpolation mit entweder den vertikalen oder horizontalen Gitternetzlinienpunkten bekommen.

Die Interpolation läuft dann wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

für die zwei Punkte mit bereits berechneter Abbildung, dann folgt für den Punkt, der im Verhältnis  $t \in [0; 1]$  dazwischen liegt:

$$\begin{pmatrix} t * a_1 + (1 - t) * a_2 & t * b_1 + (1 - t) * b_2 \\ t * c_1 + (1 - t) * c_2 & t * d_1 + (1 - t) * d_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Interpolation ist natürlich schneller, allerdings auch nicht so genau, aber wer braucht bei Approximation schon Genauigkeit? :). Umso feiner das Gitter ist, umso genauer wird die "glatte" Verzerrung, umso höher ist allerdings auch die benötigte Rechenleistung.

Als Anwendung der diskreten Geometrie ist dies weniger ein Visualisierungsversuch, sondern ein schönes Beispiel zur Bearbeitung beziehungsweise zur Manipulation von Bildern und macht Lust auf mehr...

## 6 Quellen

S. Schaefer, T. McPhail, J. Warren, *Image deformation Using Moving Least Squares*, ACM SIGGRAPH 2006, 533–540.

