Potenzen, Potenzgesetze…

Carolin Scholze, Ramin Freund

25.05.11

Gliederung

- Jahrgangsstufen I-VI
- Jahrgangsstufen VII-X
- Arbeitsphase I
- Sekundarstufe II
- Arbeitsphase II

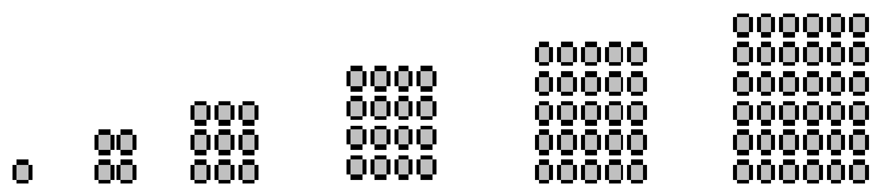
Doppeljahrgangsstufe 3/4

- Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen bis 10^6
- Zahlenfolgen

<u>Form und Veränderung</u>

- geometrische Veranschaulichung arithmetischer Sachverhalte (Rechengesetze, Dreieckszahlen, Quadratzahlen)
- Fläche, Flächeninhalt, Umfang Einheitsquadrate, -würfel → SuS operieren noch nicht mit dem Begriff cm^2 etc.

Dreieckszahlen



Quadratzahlen

Doppeljahrgangsstufe 5/6

- natürliche Zahlen deutlich größer als eine Million
- Zahlenbereichserweiterung Bruchzahlen
- Flächenberechnung erweitert (Dreiecke)

<u>Zahlen und Operationen</u>

- Zehnerpotenzen
- natürliche Zahlen auf ihre Teilbarkeit untersuchen → Quadratzahlen

<u>Form und Veränderung</u>

- Volumen von Würfel und Quader, Oberflächeninhalt Quader;

<u>Größen und Messen</u>

- Flächeninhalt: mm^2 etc.
- Rauminhalt: $1\ cm^3 = 1\ ml$, $1\ dm^3 = 1\ l$

Diskussion

Sollte aufgrund der Kenntnisse der allgemeine Potenzbegriff eingeführt werden?

Doppeljahrgangsstufe 7/8

- Zahlenbereichserweiterung rationale Zahlen
- Gleichungen
- Erweiterung Berechnung Flächeninhalt, Volumen, Oberflächeninhalt
- Funktionen

<u>P2 Verhältnisse mit Proportionalität erfassen</u>

- beschreiben proportionale Zuordnungen

<u>P5 Mit Variablen, Termen und Gleichungen Probleme lösen</u>

- wechseln situationsangemessen zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen von Zahlen (Bruchdarstellung, Dezimal-darstellung, Zehnerpotenzen mit natürlichen Exponenten)
- lösen Gleichungen - auch nichtlineare - durch „Ausprobieren und Korrigieren“
- Binomischen Formeln

Doppeljahrgangsstufe 9/10

- Zahlenbereichserweiterung reelle Zahlen

<u>P1 Neue Zahlen entdecken</u>

- Rechnen (Produkt, Quotient, Summe, Differenz) mit Quadratzahlen u. –wurzeln (nährungsweise bestimmen, geom. konstruieren)

<u>P2 Längen und Flächen bestimmen und berechnen</u>

- Satz des Pythagoras

Die Potenz mit ihrem Exponenten von $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

- Beliebte Einführung zum allgemeinen Potenzbegriff

Dem Erfinder des Schachspiels, einem gewissen Sessa Ibn Daher, soll der indische König Sheram für seine geniale Erfindung einen Wunsch gewährt haben. Der Erfinder wünschte sich:

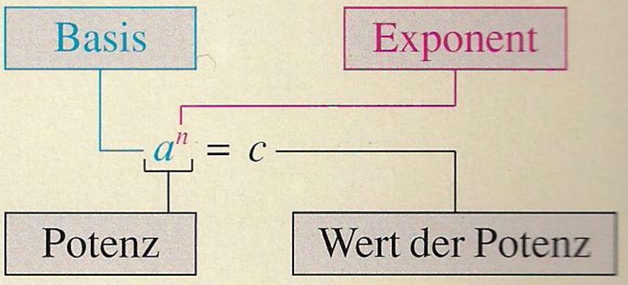
für das 1. Schachbrettfeld 1 Reiskorn,
für das 2. Schachbrettfeld 2 Reiskörner,
für das 3. Schachbrettfeld 4 Reiskörner,
für das 4. Schachbrettfeld 8 Reiskörner,
für das 5. Schachbrettfeld 16 Reiskörner;

also für jedes Feld doppelt so viele Reiskörner wie für das vorangehende. Der König stimmte dieser scheinbar bescheidenen Bitte zu. Er ahnte nicht, dass diese Bitte für ihn unerfüllbar war.

Natürliche Potenz

Ein Produkt aus gleichen Faktoren schreibt man kürzer als Potenz.
Allgemein gilt:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$



Die Basis gibt den Faktor *a* an, der Exponent die Anzahl der Faktoren.

Diskussion

- Definition:

$$a^0 = 1, \qquad (a \neq 0)$$

Da:

Permanenz-Regel für die erste Zeile: die Zahl wird jeweils durch 10 dividiert							
1. Zeile:	1000000	100000	10000	1000	100	10	1
2. Zeile:	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Permanenz-Regel für die zweite Zeile: die Hochzahl nimmt jeweils um 1 ab							

oder:

$$a^m = a^{0+m} = a^0 \cdot a^m$$

$$a^0 = 1$$

Oder:

- http://www.youtube.com/watch?v=0BAWxjshPWo

Diskussion

Warum ist 0^0 nicht definiert? Wie lässt sich das plausibel für die SuS darstellen?

Potenzen mit dem Exponenten 0	5^0	4^0	3^0	2^0	1^0	0^0	Hier würde man $0^0 = 1$ erhalten.
Potenzwerte	1	1	1	1	1	?	
Potenzen mit der Basis 0	0^5	0^4	0^3	0^2	0^1	0^0	Hier würde man $0^0 = 0$ erhalten.
Potenzwerte	0	0	0	0	0	?	

Was sagt die Informatik dazu?

$$0^0 := 1$$

- Standardisierung von Programmiersprachen

“[…] programmers who have implemented z^w on computers have so often decreed 0^0 to a capital offence. […] To draw conclusions based upon something better than fear or speculation, we need estimates for certain costs and benefits. Setting $z^0 := 1$ without exception confers the benefit of adherence to simply stated rules; but it introduces some risk […]”

Aus: Kahan, W. Branch Cuts for Complex Elementary Functions or Much Ado about Nothing's Sign Bit, in The State of the Art in Numerical Analysis, editors A. Iserles and M. J. D. Powell, Clarendon Press, Oxford 1987, S. 205.

Ganze Potenz

- Wird häufig m. H. der Zehner-/Zweierpotenzen eingeführt (Permanenzreihen)

Die Exponenten nehmen um 1 ab.

$$
\begin{aligned}
2^5 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \\
2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \\
2^3 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\
2^2 &= 2 \cdot 2 = 4 \\
2^1 &= 2 = 2 \\
2^0 &= 1 \longleftarrow = 1 \\
2^{-1} &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} \\
2^{-2} &= \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \\
2^{-3} &= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \\
2^{-4} &= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} \\
2^{-5} &= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}
\end{aligned}
$$

Die Potenzen werden durch 2 dividiert.

Es lässt sich ablesen:

$$\boxed{\textit{Für alle } a \neq 0 \textit{ gilt}: \quad a^0 = 1, \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \textit{ und } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \textit{mit } n \in \mathbb{N}}$$

Rationale Potenz

- Einführung der Wurzel als Umkehroperation des Potenzierens

	Potenzieren		Wurzelziehen (Radizieren)	
3	3^2	9	$x = \sqrt{9}$	3
-3	$(-3)^2$	9	$x = \sqrt{9}$	$3 \neq -3$
2	2^3	8	$x = \sqrt[3]{8}$	2

Eine nicht negative Zahl x heißt n-te Wurzel aus a ($a \geq 0$), wenn $x^n = a$. Man schreibt:

Wurzelexponent

$$x = \sqrt[n]{a}$$

Wert der Wurzel

Radikand

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad (m, n \in \mathbb{N}, \;\; a \in \mathbb{R}_0^+)$$

Diskussion

- Konfliktfall:

$$\sqrt[3]{-8} = -2,$$

denn

$$(-2)^3 = -8$$

Wie reagiert ihr?

- Auflösung mittels Anwendung der Potenzgesetze

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Reelle Potenz

- kaum relevant in neuesten Büchern
- in älteren umfassend behandelt

Gibt es auch zu jeder vorgegebenen Basis $a \in \mathbb{R}^+$ und zu jeder Zahl $b \in \mathbb{R}^+$ einen Exponenten $q \in \mathbb{Q}$, so daß $b = a^q$?

Beispiele

1. $a = 2$, $b = 32$
   $2^x = 32 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$
2. $a = 9$, $b = \frac{1}{27}$
   $9^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-3} \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$
   Strategie: Konstruktion einer gemeinsamen Basis und Exponentenvergleich.
3. $a = 2$, $b = 10$
   $2^x = 10 \Leftrightarrow 2^x = 2 \cdot 5 \Leftrightarrow$ ______?

Problem

Im 3. Beispiel versagt der Exponentenvergleich. Auch Probieren mit dem Taschenrechner führt zu keinem exakten Ergebnis, sondern nur zu Intervallen:

$3{,}3 < x < 3{,}4$, denn $2^{3,3} = 9{,}84\ldots$ und $2^{3,4} = 10{,}55\ldots$ usw.

Vermutung: Es gibt keine rationale Zahl q mit $2^q = 10$.

Beweis: Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl $q = \frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N}^+)$ mit $2^{\frac{m}{n}} = 10$.

Dann würde gelten: $2^m = 10^n$.

10^n ist eine natürliche Zahl wegen $n \in \mathbb{N}^+$. Dann muß auch 2^m eine natürliche Zahl sein. 10^n ist durch 10 teilbar, 2^m nicht. Widerspruch!

Aus: Schönigh, Klasse 10, 1980.

Einführung über Funktionen

ebenfalls als ein Funktionswert $f\,(\sqrt{2})$ der betrachteten Funktion angesehen (↗ Bild C 16). Es ist

$$f(\sqrt{2}) = 2 \cdot 1{,}5^{\sqrt{2}}.$$

$1{,}5^{\sqrt{2}}$ ist eine Potenz mit *irrationalem Exponenten*. Potenzen mit irrationalen Exponenten kann man näherungsweise ermitteln, indem man für den Exponenten einen rationalen Näherungswert in der Rechnung verwendet.[1)]

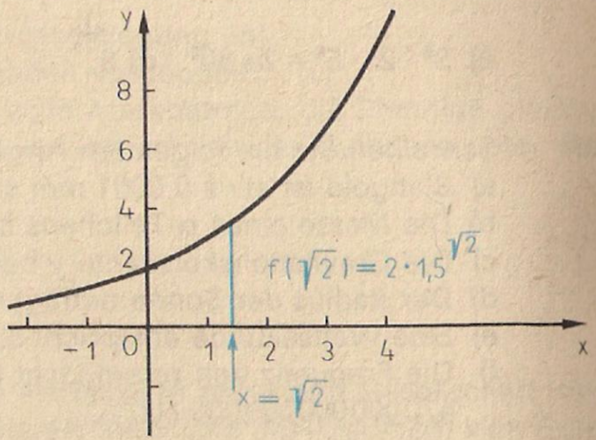


Bild C 16

15 Man ermittle einen Näherungswert für $1{,}5^{\sqrt{2}}$.

Lösung: Es ist

$1 < \sqrt{2} < 2$, also

$1{,}5 < 1{,}5^{\sqrt{2}} < 1{,}5^2$, d. h. $1{,}5 < 1{,}5^{\sqrt{2}} < 2{,}25$.

$1{,}5^{\sqrt{2}}$ liegt zwischen 1,5 und 2,25.

Genauer erhalten wir das Resultat durch die Verwendung des Taschenrechners. Der Schulrechner SR 1 ermittelt für $\sqrt{2}$ einen rationalen Wert. Er rechnet mit diesem weiter und ermittelt den Näherungswert 1,77431 für den Funktionswert $1{,}5^{\sqrt{2}}$.

Aus: Volk & Wissen, Klasse 10, 1987.

Begründung der Erweiterung

Def.: Ist a der Grenzwert der rationalen Zahlenfolge (a_n), dann ist x^a der Grenzwert von (x^{a_n}).

Beachte: Jede reelle Zahl ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.

z.z.: (i) mit (a_n) auch (x^{a_n}) konvergiert

(ii) für jede andere rationale Folge (b_n)mit dem Grenzwert a haben die Folgen (x^{a_n}) und (x^{b_n}) denselben Grenzwert

Es gilt: $x^{a_m} - x^{a_n} = x^{a_n}(x^{a_m - a_n} - 1)$.

(i) Da:

- (a_n) eine Cauchy-Folge, (x^{a_n}) beschränkt

→(x^{a_n}) eine Cauchy-Folge und somit konvergent

(ii) Da:

- $(a^n - b^n)$ eine Nullfolge

→$\lim(x^{a_n - b_n}) = 1$

Es folgt: $\lim(x^{a_n} - x^{b_n}) = \lim(x^{b_n}(x^{a_n - b_n} - 1)) = 0.$

Def.: $x^{\lim(a_n)} = \lim(x^{a_n})$

Für reelle Exponenten gelten wieder die bekannten Potenzregeln, was sich aus den Grenzwertsätzen für Folgengrenzwerte ergibt.

Potenzgesetze

$$a^c = b$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Von den Potenz- zu den Wurzelgesetzen

$$\sqrt[x]{a} = b \Leftrightarrow b^x = a$$

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

P4 Situationen mit quadratischen Funktionen und Potenzfunktionen beschreiben

- quadratische Funktion
- Potenzfunktion
- nutzen Potenzgesetze zur Vereinfachung von Termen
- nutzen n-te Wurzeln zur Auflösung von Potenzgleichungen
- beschreiben die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion einer quadratischen Funktion
- nutzen Wurzelgleichungen zur Lösung von Problemen

Darstellung der Funktionen

Quadr zu wurzel.ggb

Potenzieren

$$a^c = b$$

a ist gesucht

b ist gesucht

Radizieren

$$a = \sqrt[c]{b}$$

Und wenn c gesucht ist?

- Eine weitere Umkehrung des Potenzierens: Logarithmieren

DEFINITION:
Es seien a, b und c reelle Zahlen, und es gelte $a > 0$ und $a \neq 1$ sowie $b > 0$.
Dann ist $c = \log_a b$ diejenige reelle Zahl, für die $a^c = b$ gilt. (Gelesen: Logarithmus von b zur Basis a.)

$\log_a b$ ← **Numerus**

Basis (des Logarithmensystems)

Einführungsmöglichkeiten

In der Gleichung $3^x = 243$ befindet sich die Lösungsvariable im Exponenten. Schreiben wir die Zahl 243 als Potenz von 3, können wir die Lösung $x = 5$ ablesen.

$$3^x = 243$$
$$3^x = 3^5$$
$$x = 5$$

Für die Lösung der Gleichung $3^x = 243$ führen wir zur Vereinfachung die Bezeichnung Logarithmus ein: Der **Logarithmus** von 243 zur Basis 3 ist 5. Man schreibt: $\log_3 243 = 5$.

19. Loga-Rhythmus

Umkehrfunktion

In Zeichnung 1 ist der Graph der Funktion $f: y = 2^x$ an der Winkelhalbierenden $y = x$ gespiegelt. Es entsteht der Graph der Umkehrrelation f^*. Sie ist sogar Umkehrfunktion, weil aus $x_1 \neq x_2$ folgt $2^{x_1} \neq 2^{x_2}$.

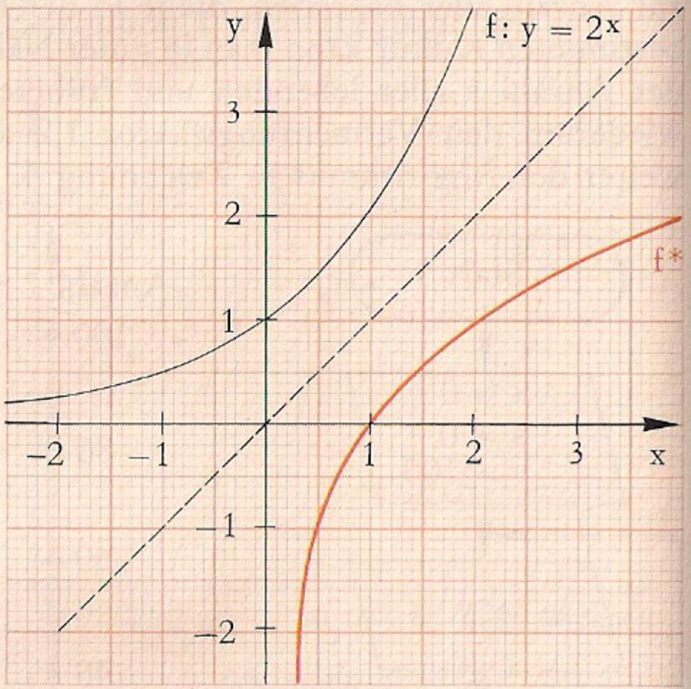
Die Funktionsgleichung kannst du noch nicht aufstellen. Wir überlegen uns: Durch Vertauschen der Partner erhalten wir aus einer Wertetafel für f (Tafel 1) eine solche für f^* (Tafel 2).

x	-1	0,5	1	3
$y=2^x$	0,5	$\sqrt{2}$	2	8

Tafel 1

$x=2^y$	0,5	$\sqrt{2}$	2	8
y	-1	0,5	1	3

Tafel 2



Zeichnung 1

Durch f wird jedem Exponenten $x \in \mathbb{R}$ die Zahl $2^x \in \mathbb{R}^+$ zugeordnet. Durch f^* wird jeder Zahl $x \in \mathbb{R}^+$ der Exponent y zugeordnet, der mit 2 als Basis die Zahl $x \in \mathbb{R}$ ergibt. Beispiel: $f(3) = 8$, denn $2^3 = 8$; $f^*(8) = 3$, denn $8 = 2^3$.

Der durch f^* einer Zahl $x \in \mathbb{R}^+$ zugeordnete Exponent $y \in \mathbb{R}$ heißt **Logarithmus von x zur Basis 2.** Dafür schreibt man kurz: $y = \log_2 x$.

Die Umkehrfunktion von $f: y = 2^x$ ist demnach $f^*: y = \log_2 x$. f^* heißt **Logarithmusfunktion zur Basis 2.**

… zu den Logarithmusgesetzen

$$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$log_a (b \cdot c) = log_a b + log_a c$$

$$log_a \left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$$

$$log_a b^r = r \cdot log_a b$$

$$log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot log_a b$$

Besonderheiten?

- spezielle Basen:
  dekadischer Log. $log_{10}x = \lg x$
  natürliche Log. $log_e x = \ln x$

- Basiswechsel: $log_c b = \frac{log_a b}{log_a c} = \frac{ln\ b}{\ln c} = \frac{\lg b}{\lg c}$

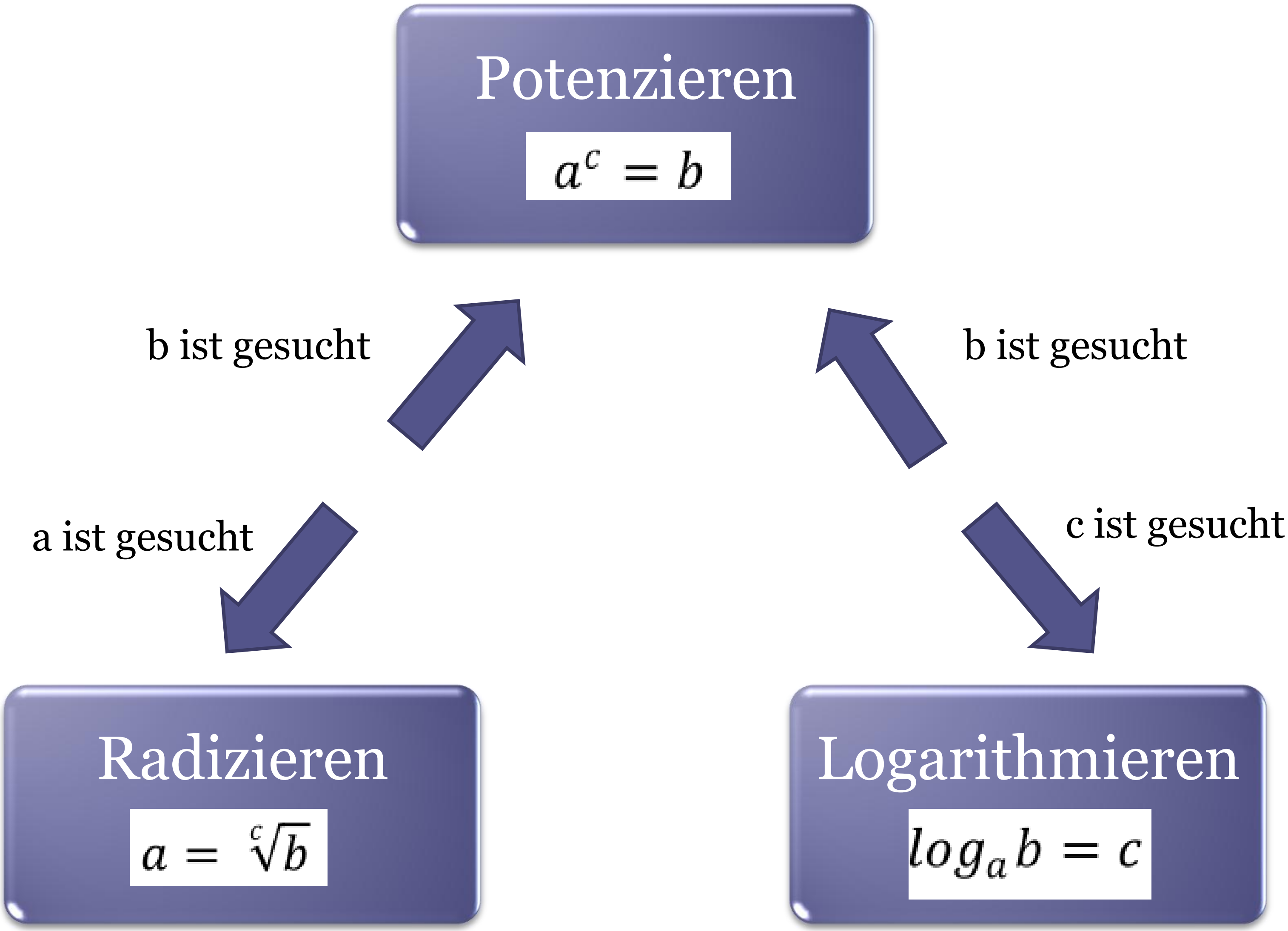
- $a^c = e^{c \cdot \ln a}$

P6 Wachstum und Zerfall mit Funktionen beschreiben

- beschreiben Logarithmusfunktionen als Umkehrfunktionen von Exponentialfunktionen
- nutzen die Logarithmengesetze zur Lösung von Exponentialgleichungen

Darstellung der Funktionen

Expo zu log.ggb


Potenzieren
$a^c = b$
b ist gesucht
b ist gesucht
a ist gesucht
c ist gesucht
Radizieren
$a = \sqrt[c]{b}$
Logarithmieren
$log_a b = c$

Gruppenarbeitsphase I

Motivationsbeispiel Quadratwurzelgesetze

$$\sqrt{289} * \sqrt{2} * \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{3}} + \sqrt{15} * \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{15}} - 7 * \sqrt{26} - 10 * \sqrt{26} + 7 * \sqrt{27} + 2 * \sqrt{3} - \sqrt{529} * \sqrt{42} * \frac{1}{\sqrt{14}} =$$

Anwendung

<u>P6 Wachstum und Zerfall mit Funktionen beschreiben</u>

- beschreiben exponentielles Wachstum an einfachen Beispielen (z.B. Zinseszins)
- beschreiben exponentielle Abnahme an Beispielen
- bearbeiten Sachprobleme in Zusammenhang mit Wachstum und Zerfall,
- untersuchen an Hand des Modells die Auswirkung von Parameterveränderungen auf den Wachstums- bzw. Zerfallsprozess
- modellieren Sachsituationen mit der Exponentialfunktion

Beispiele

Exponentialfunktionen

Zahlreiche physikalische, technische, biologische und wirtschaftliche Prozesse können mit Hilfe von Exponentialfunktionen beschrieben werden. Diese Funktionen sind dadurch gekennzeichnet, daß die unabhängige Variable als Exponent auftritt.

Definition 4.1 : Sei $c \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
Dann wird die Funktion

$$f : x \longrightarrow c \cdot a^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

als Exponentialfunktion zur Basis a bezeichnet.

Beispiele für Exponentialfunktionen :

$f(x) = 3^x$ (c=1, a=3)

$f(x) = 2 \cdot (0{,}5)^x$ (c=2, a=0,5)

$f(x) = 3 \cdot (\sqrt{5})^x$ (c=3, a=$\sqrt{5}$)

Wachstumsfunktionen

Beispiel : Zur Unterstützung von Gärungsprozessen, z.B. bei der Herstellung von Lebensmitteln, werden Hefen benötigt. Die Hefezellen wachsen in Behältern mit Nährlösung. Bei einer solchen Hefekultur verdoppelt sich die Anzahl der Hefezellen im Durchschnitt stündlich. Zu Beginn des Wachstumsprozesses werden 0,5 g Hefe in den Behälter eingebracht, der ein Fassungsvermögen von 200 g Hefe besitzt.

a) Stellen Sie eine Wertetabelle auf, aus welcher man die Hefemasse nach 1, 2, 3, 4, ... Stunden ablesen kann.

b) Stellen Sie die Gleichung der Funktion f auf, welche der Zeit t (in Stunden) die entsprechende Hefemasse (in Gramm) zuordnet. Zeichnen Sie den Funktionsgraph.

c) Nach welcher Zeit ist das Fassungsvermögen des Behälters erreicht ?

Lösung zu a) :

Zeit t in h	0	1	2	3	4	5	6
Masse m in g	0,5	1	2	4	8	16	32

Lösung zu b) :

Wegen $f(0)=0{,}5$, $f(1)=0{,}5\cdot 2$, $f(2)=0{,}5\cdot 2^2$, $f(3)=0{,}5\cdot 2^3$ erscheint die Funktionsgleichung

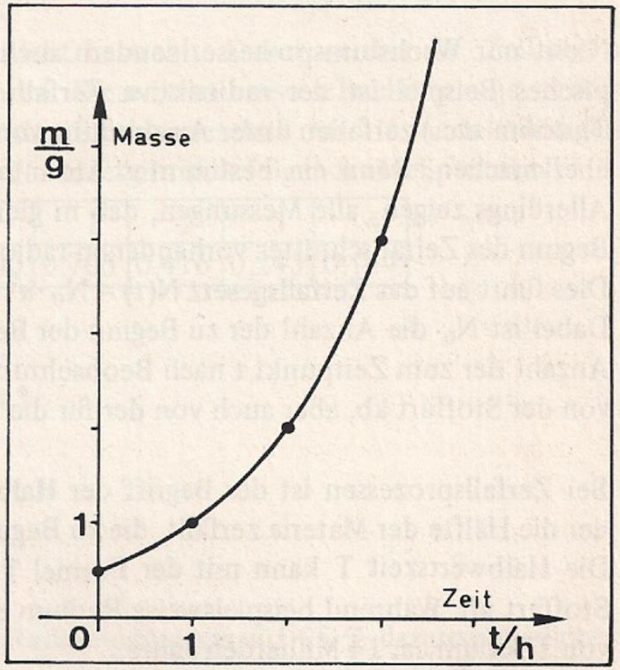
$$f(t) = 0{,}5\cdot 2^t$$

zur Beschreibung des Hefewachstums geeignet.

Lösung zu c) :

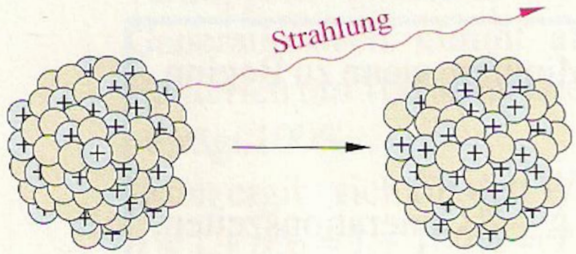
Der Ansatz $f(t) = 200$ liefert :

$$0{,}5\cdot 2^t = 200$$
$$2^t = 400$$
$$t\cdot \ln 2 = \ln 400$$
$$t = \frac{\ln 400}{\ln 2} \approx 8{,}64\ \text{h} \approx 8\ \text{h}\ 38\ \text{min}\ .$$



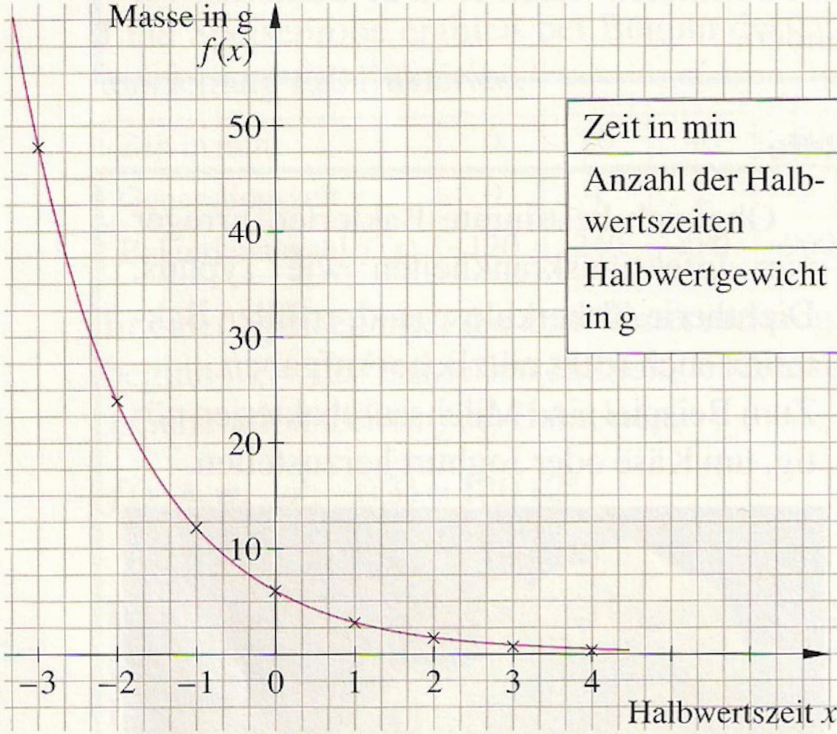
50 Radioaktiver Zerfall

Wenn ein Stoff radioaktiv ist, zerfallen seine Atomkerne, in denen sich fast die ganze Atommasse befindet, durch Aussendung von Strahlung. Die Lebensdauer radioaktiver Stoffe wird durch die **Halbwertszeit** beschrieben. Ist die Halbwertszeit vergangen, so ist die Anzahl der Atomkerne des radioaktiven Materials auf die Hälfte des ursprünglichen Werts gesunken.



In der Halbwertszeit nimmt also die Anzahl der radioaktiven Atome in einer Probe um 50% ab. Die Wachstumsrate $p\%$ beträgt -50%.
Dann ergibt sich für den Wachstumsfaktor q:
$q = 1 + p\% = 1 - 50\% = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$
Es liegt exponentielle Abnahme vor. Somit können wir die Masse radioaktiven Materials in einer Probe zu einer bestimmten Anzahl von Halbwertszeiten berechnen.

Zu Beginn der Messung werden 6 g vom radioaktiven Stickstoff $^{13}_{7}N$ gemessen.



Radioaktiver Stickstoff $^{13}_{7}N$ hat eine Halbwertszeit von 10,0 min. Nach 10 min ist jeweils noch die Hälfte der vorherigen Masse vorhanden.

Zeit in min	−30	−20	−10	0	10	20	30	40
Anzahl der Halbwertszeiten	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
Halbwertgewicht in g	48,0	24,0	12,0	6,0	3,0	1,5	0,75	0,375

Zwei Halbwertszeiten vor Messungsbeginn lagen 24 g des radioaktiven Stickstoffs vor.
$f(-2) = 6 \cdot q^{-2}$; $f(-2) = 6 \cdot 0{,}5^{-2} = 24$

Drei Halbwertszeiten nach Messungsbeginn lagen 0,75 g des radioaktiven Stickstoffs vor.
$f(3) = 6 \cdot q^{3}$; $f(3) = 6 \cdot 0{,}5^{3} = 0{,}75$

Der radioaktive Zerfall lässt sich durch die spezielle Exponentialfunktion $f(x) = w_0 \cdot 0{,}5^x$ beschreiben, wobei x die Anzahl der Halbwertszeiten ist.

Sekundarstufe II

- Bereich der Analysis: Kurvendiskussion, Stammfunktion etc.
- Zentral: e-Funktion:

$$f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$$

$\alpha > 0$: exp. Wachstum

$\alpha < 0$: exp. Zerfall

Leitidee: funktionaler Zusammenhang

- charakterisieren und interpretieren die Verläufe der Fkt. $f(x)=a^x$, $f(x)=\log_a x$
- geben zeichnerisch und rechnerisch Umkehrfunktionen zu linearen Funktionen, Potenz- und Wurzelfunktionen und zu Exponentialfunktionen an und beschreiben damit reale Situationen
- verwenden Prozentdarstellungen, Potenzen, Wurzeln und Logarithmen zur Lösung inner- und außermathematischer Probleme

Arbeitsphase II

- Welchen Anforderungsbereich sprechen die jeweiligen Teilaufgaben an?

- Welche Kompetenzbereiche?
  Argumentieren/ Problemlösen/ Modellieren/ Darstellungen verwenden/ Symbole, Verfahren & Werkzeuge verwenden/ Kommunizieren & Kooperieren

- Eignet sich die Aufgabe als Abituraufgabe?