Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

16.12.2015

# Probeklausur Analysis I

- Bitte lösen Sie **jede Aufgabe auf einem separaten Blatt**.
- Geben Sie auf jedem Blatt gut lesbar Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** an.
- Achten Sie auf gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte.

1. Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung:
   Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + n\,x$. **8 Pkt.**

2. Weisen Sie nach, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt: $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$ **6 Pkt.**

3. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)$ mit $x_n = \dfrac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2}$. **6 Pkt.**

4. Untersuchen Sie die Folgen $(c_n)$ und $(d_n)$ auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

   (a) $c_n = \dfrac{1}{1+(-2)^n}$ **10 Pkt.** (b) $d_n = \sqrt{1 + \dfrac{n+1}{n}}$ **6 Pkt.**

   *Hinweis:* Für die Monotoniebetrachtungen kann es sinnvoll sein, Differenzen oder Quotienten aufeinanderfolgender Glieder zu betrachten.

5. Weisen Sie nach, dass jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergent ist. Geben Sie dazu zunächst exakte Definitionen der Begriffe „Cauchyfolge“ und „konvergente Folge“ an. **14 Pkt.**

6. Sei $(z_k)$ eine Folge reellerZahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(z_k - z_{k+1})$ genau dann konvergent ist, wenn die Folge $(z_k)$ konvergiert. **10 Pkt.**

Insgesamt: **60 Pkt.**

## Zusatzaufgaben

Z1. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\dfrac{|a|}{1+|a|} \leq \dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$ gilt. **8 Zusatzpkt.**

Z2. Untersuchen Sie, ob folgende Reihen konvergent, absolut konvergent oder divergent sind:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\sqrt{k}}$ **4 Zusatzpkt.** (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ **8 Zusatzpkt.**

Bewertung: 1,0 ab 57 Pkt.; 1,3 ab 54 Pkt.; 1,7 ab 51 Pkt.; 2,0 ab 48 Pkt.; 2,3 ab 45 Pkt.; 2,7 ab 42 Pkt.; 3,0 ab 39 Pkt.; 3,3 ab 36 Pkt.; 3,7 ab 43 Pkt., 4 ab 30 Pkt.

**LÖSUNGEN:**

1. Beweis durch vollständige Induktion über $n$.
   *Induktionsanfang*: Die Aussage gilt offensichtlich für $n = 1$.
   *Induktionsschritt*:
   Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
   Induktionsbehauptung: $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\, x$.
   Induktionsbeweis:
   $$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n (1 + x) \overset{IV}{\geq} (1 + n\, x)(1 + x) = 1 + (n + 1)\, x + \underbrace{n\, x^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n + 1)\, x.$$

2. Es gilt für $k \neq 0$:
   $$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k+1)+1)}{(k+1)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)}{k!} \cdot \frac{(n-k-1+1)}{(k+1)} \\ &= \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}.\end{aligned}$$
   Für $k = 0$ ist diese Rechnung wegen $0! = 1! = 1$ ebenfalls richtig.

3. Wir kürzen den Term $3^n$ im Zähler und Nenner. Dann ergibt sich:
   $$\frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2} = \frac{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{2}{3^n}}.$$
   Die Terme rechts sind entweder Konstanten oder Glieder von Nullfolgen. Ausführlich ergibt sich:
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{3^n}\right)} = \frac{3 + \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3^n}} = \frac{3+0}{1+0} = 3\,.$$

4. (a) Bereits an den ersten drei Folgengliedern $c_1 = -1$, $c_2 = \frac{1}{5}$ und $c_3 = -\frac{1}{7}$ erkennt man, dass die Folge nicht monoton ist, auch bei beliebig großen Indizes wechseln sich positive und negative Folgenglieder ab.
   Beschränktheit: Für gerades $n$, also $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$, folgt:
   $$|c_n| = \left|\frac{1}{1 + 4^k}\right| \leq 1.$$
   Für ungerades $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, erhält man
   $$|c_n| = \left|\frac{1}{1 - \frac{4^k}{2}}\right| = \frac{2}{4^k - 2} \leq \frac{2}{4 - 2} = 1.$$
   Damit gilt $|c_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Folge ist beschränkt.
   Da $(c_n)$ beschränkt und nicht monoton ist, lassen sich hieraus keine Schlussfolgerungen hinsichtlich der Konvergenz ableiten.
   Wir zeigen, dass $(c_n)$ eine Nullfolge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon} + 1$ bzw. $2^{n_0} - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ und somit erst recht $2^{n_0} + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$.
   Für alle geradzahligen $n \geq n_0$ ist dann
   $$|c_n| = \left|\frac{1}{1 + (-2)^n}\right| = \frac{1}{1 + (-2)^n} = \frac{1}{1 + 2^n} \leq \frac{1}{1 + 2^{n_0}} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon\,.$$
   Für alle ungeradzahligen $n \geq n_0$ gilt
   $$|c_n| = \left|\frac{1}{1 + (-2)^n}\right| = \left|\frac{1}{1 - 2^n}\right| = \frac{1}{2^n - 1} \leq \frac{1}{2^{n_0} - 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon\,.$$
   In jedem Falle ist $|c_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und somit $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

(b) Es ist $d_n \geq 0$ und

$$d_n = \sqrt{1 + \frac{n+1}{n}} = \sqrt{2 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt{3}.$$

Daher und wegen $d_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge beschränkt.

Für die Monotonie schreiben wir $d_n = \sqrt{\frac{2n+1}{n}}$ und betrachten den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder:

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \sqrt{\frac{(2n+3)\,n}{(n+1)\,(2n+1)}} = \sqrt{\frac{2n^2+3n}{2n^2+3n+1}} < 1.$$

Die Folge fällt also streng monoton.

Da $(d_n)$ monoton und beschränkt ist, ist die Folge konvergent.

5. Die Definitionen und der Beweis finden sich in der Vorlesung und in dem Skript von Helga Baum. Man beachte, dass nur eine Richtung des Konvergenzkriteriums von Cauchy bewiesen werden musste, nämlich dass eine Folge konvergiert, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

6. Die $n$. Partialsumme von $\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - z_{k+1})$ ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k+1}) = z_1 - z_2 + z_2 - z_3 + \cdots + z_{n-1} - z_n + z_n - z_{n+1} = z_1 - z_{n+1}\,.$$

Somit konvergiert die Partialsummenfolge $(s_n)$ mit $s_n = z_1 - z_{n+1}$ genau dann, wenn $(z_n)$ konvergiert, und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - z_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(z_1 - z_{n+1}) = z_1 - \lim_{n\to\infty} z_{n+1} = z_1 - \lim_{n\to\infty} z_n\,.$$

Z1. Wir formen zunächst die zu beweisende Ungleichung um.

$$\begin{array}{rrcll}
& \dfrac{|a|}{1+|a|} & \overset{?}{\leq} & \dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} + \dfrac{|b|}{1+|b|} & \Big|\cdot \underbrace{(1+|a|)(1+|b|)(1+|a+b|)}_{>0\ \Rightarrow\ \text{Relationszeichen bleibt erhalten}} \\
\iff & |a|\cdot(1+|b|)(1+|a+b|) & \overset{?}{\leq} & |a+b|\cdot(1+|a|)(1+|b|) & \\
& & & +|b|\cdot(1+|a|)(1+|a+b|) & \\
\iff & (|a|+|ab|)(1+|a+b|) & \overset{?}{\leq} & (|a+b|+|a(a+b)|)(1+|b|) & \\
& & & +(|b|+|ab|)(1+|a+b|) & \\
\iff & |a|+|ab|+|a(a+b)| & & & \\
& +|ab(a+b)| & \overset{?}{\leq} & |a+b|+|a(a+b)|+|b(a+b)| & \\
& & & +|ab(a+b)|+|b|+|ab| & \\
& & & +|b(a+b)|+|ab(a+b)| & \Big| -|ab|-|a(a+b)|-|ab(a+b)| \\
\iff & |a| & \overset{?}{\leq} & |a+b|+|b(a+b)| & \\
& & & +|ab(a+b)|+|b|+|b(a+b)| & \Big| -|a| \\
\iff & 0 & \overset{?}{\leq} & |b|-|a|+|a+b| & \\
& & & +\underbrace{2|b(a+b)|+|ab(a+b)|}_{\geq 0} & \\
\Longleftarrow & 0 & \overset{?}{\leq} & |b|-|a|+|a+b| &
\end{array}$$

Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\big||b|-|a|\big| \leq |a+b|.$$

Damit gilt auch $-(|b|-|a|) \leq |a+b|$ und $0 \leq |a+b|+|b|-|a|$.

Damit ist auch unsere obige Gleichung bewiesen.

Z2. (a) Es ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ die Riemannsche Zeta-Funktion für $s = \frac{3}{2} > 1$. Diese ist laut Vorlesung konvergent und, da alle Summanden positiv sind, damit auch absolut konvergent.

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}
\end{aligned}$$

Es ist aber $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = 0$ und $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$. D.h. die Absolutbeträge der Reihenglieder bilden eine monoton fallende Nullfolge. Damit ist nach dem Leibniz-Kriterium die alternierende Reihe konvergent.

Nun untersuchen wir, ob die Reihe absolut konvergent ist. Es ist:

$$\begin{aligned}
\sqrt{k+1} + \sqrt{k} &< 2\sqrt{k+1} \\
&< 2(k+1).
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \\
&> \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2(k+1)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

D.h. die harmonische Reihe ist eine divergente Minorante für die Reihe der Absolutbeträge. Damit ist die betrachtete Reihe nicht absolut konvergent.