HU Berlin Wintersemester 2013/14

Probeklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Prof. Dr. J. Kramer

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\xi_1 & + & \xi_2 & + & \xi_3 & = & -6\alpha \\ 2\xi_1 & + & \xi_2 & + & (\beta+1)\xi_3 & = & 4 \\ \beta\xi_1 & + & 3\xi_2 & + & 2\xi_3 & = & 2\alpha \ . \end{array}$$

(a) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung?

(b) Zeigen Sie, dass für den Fall $\beta = 0$ nur ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, für welches eine Lösung existiert und geben Sie den zum Lösungsraum gehörigen affinen Unterraum A an.

(c) Wann heißen zwei affine Unterräume *parallel*? Bestimmen Sie einen zu A parallelen affinen Unterraum.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

(a) Definieren Sie den Begriff der *linearen Unabhängigkeit* einer Menge von Vektoren und den Begriff einer *Basis* eines reellen Vektorraums.

(b) Es sei V ein reeller Vektorraum. Folgt aus der linearen Unabhängigkeit dreier Vektoren $u, v, w \in V$ auch die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren $u+v+w$, $u+v$, $v+w \in V$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ bilden die drei Vektoren
$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3 (15 Punkte)

(a) Definieren Sie *Kern*, *Bild* und *Rang* einer linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$.

(b) Was besagt der *Dimensionssatz* für lineare Abbildungen?

(c) Es sei $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung und

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & \lambda \end{pmatrix}$$

die zu f_λ gehörige Matrix bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat A den Rang 2? Bestimmen Sie für den Fall $\lambda = 1$ Bild und Kern von f_λ.

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Betrachten Sie zwei lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 \\ \xi_1 - \xi_4 \end{pmatrix}, \qquad g\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_1 - \xi_2 \\ 3\xi_2 \end{pmatrix}.$$

Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ wählen wir die Standardbasis $\mathfrak{B}$, im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$ die Basis

$$\mathfrak{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie $g \circ f$ und die Matrizendarstellung von

(a) f bzgl. der Basen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

(b) g bzgl. der Basen $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$.

(c) $g \circ f$ bzgl. der Basen $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

In einem n-dimensionalen reellen Vektorraum V seien k Unterräume $U_1, \ldots, U_k$ der Dimension $n-1$ gegeben ($k \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie:

$$\dim(U_1 \cap \ldots \cap U_k) \geq n - k.$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion nach k.