

Ausgewählte Kapitel

Sommersemester 2012



G. Luckmann, S. Zänker

(abgeordnete Lehrerinnen)

11.04.12

Diagnostizieren von Fehlern

„Klug ist nicht, wer keine Fehler macht.
Klug ist der, der es versteht, sie zu korrigieren.“

[Wladimir I. Lenin](#)



Den größten Fehler, den man im Leben
machen kann, ist, immer Angst zu haben,
einen Fehler zu machen.



[Dietrich Bonhoeffer](#)

Aufgabe:

Die Zehnerkarte zum Linienbus kostet 8 Euro, eine Einzelkarte 1 Euro. Um wie viel Prozent ist die Zehnerkarte billiger als 10 Einzelkarten?

1. Lösungsweg:

Eine Zehnerkarte ist um 2 Euro billiger als 10 Einzelkarten, die 10×1 Euro, also 10 Euro kosten; 10 Euro entsprechen 100 %, also entspricht 1 Euro dem 10-ten Teil davon, das sind $100\% / 10 = 10\%$. Folglich entsprechen 2 Euro dem Doppelten hiervon, also $2 \times 10\% = 20\%$.

Antwort:

Die Zehnerkarte ist um **20 %** billiger als 10 Einzelkarten.

2. Lösungsweg:

Offensichtlich sind 10 Einzelkarten, die 10×1 Euro = 10 Euro kosten, um 2 Euro teurer als 1 Zehnerkarte, die nur 8 Euro kostet; 8 Euro entsprechen 100 %, also entspricht 1 Euro dem 8-ten Teil davon, das sind $100\% / 8 = 12,5\%$. Folglich entsprechen 2 Euro dem Doppelten, also $2 \times 12,5\% = 25\%$. Somit sind 10 Einzelkarten um 25 % teurer als eine Zehnerkarte, also ist umgekehrt eine Zehnerkarte um 25% billiger als 10 Einzelkarten.

Diagnostizieren von Fehlern

Aufgabe:

Ein Kilogramm Mandarinen kostet 3,25 €. Kerstin will 0,5 kg kaufen.

a) Wie viel muss sie bezahlen?

b) Berechne die gleiche Aufgabe auch für folgende Werte:

1,50 €	1,5 kg
3,30 €	2,5 kg
3,20 €	0,6 kg

Lillys Lösungsweg:

$$a) 3,25 \cdot 0,5 = 0,125 \approx$$

0,13

Sie muss 0,13 €
zahlen.

Jans Lösungsweg:

$$a) 3,25 : 0,5$$

$$32,5 : 5 = 6,5$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \hline 2,5 \\ 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

Sie muss 6,50 €
zahlen.

Diagnostizieren von Fehlern

a) $3,25 \cdot 0,5 = 0,125$

b) $1,50 \cdot 1,5 = 1,250$

$3,30 \cdot 2,5 = 6,150$

$3,20 \cdot 0,6 = 0,120$

a) $3,25 : 0,5$

b) $1,50 \cdot 1,5$

$3,30 \cdot 2,5$

$3,20 : 0,6$

Übersicht: Fachbegriffe der Fehleranalyse

PM 27 [2009](#)

Fehler	Fehlermuster	Mögliche Fehlerursachen und ihre Einordnung (syntaktisch/semantisch)	Mögliche Fehlerbearbeitungen (syntaktisch/semantisch)
Lilly rechnet: $3,25 \cdot 0,5 = 0,125$	Komma-trennt-Muster	falsche Übertragung von Strategien (syntaktisch), oft bedingt durch ein fehlendes Stellenwertverständnis (semantisch)	Ergebnisse ähnlicher Aufgaben vergleichen (Kontexteinbettung, syntaktisch) Stellenwertverständnis stabilisieren durch Verbalisierungsübungen und Anordnung auf dem Zahlenstrahl (semantisch)
Jan rechnet $3,25 : 0,5$, um den Preis für ein halbes Kilogramm zu bestimmen.	Wahl der Operation gemäß „Dividieren verkleinert, Multiplizieren vergrößert“	keine stabil aufgebauten inhaltlichen Verstellungen zur Multiplikation und Division (semantisch)	ähnliche Aufgaben vergleichen durch Kontrastieren und Einbetten (syntaktisch und semantisch) Grundvorstellungen stabilisieren (semantisch)
Paula bestimmt Lösungen von $(x-3)(x-4) = 9$ durch $x = 12$ und $x = 13$.	Die Gleichung $(x-a)(x-b) = c$ hat als Lösung: $x = a + c$ und $x = b + c$	Übergeneralisierung der Regel für das Ermitteln von Nullstellen (syntaktisch), verstärkt durch fehlende Kontrollen wie das Einsetzen der Lösungen in die Gleichung (semantisch)	Fehlerwissen aufbauen, wann man aus einer Faktorisierung die Nullstellen ablesen kann (syntaktisch) Kontrollstrategien wie das Einsetzen der Lösung in die Gleichung festigen (semantisch)
Yannick formt um: $\frac{x^3 + 1}{x} = x^2 + 1$	Falsches Kürzen mit einzelnen Summanden, wenn Zähler- oder Nennerterm eine Summe ist.	evtl. falsche Strukturierung der Teilterme (syntaktisch)	Kontrastierung von kürzbaren und nicht kürzbaren Bruchtermen zur Etablierung geeigneter Teilterm-Strukturierungen (syntaktisch) Kontrollstrategien wie das Einsetzen ausgewählter Werte in den Term (semantisch)

Moderationstechniken, Methoden und Aufgaben zum Umgang mit Fehlern im Unterricht

Situatives Eingehen auf auftauchende Fehler

- Moderation einer schülerzentrierten Bearbeitung eines Fehlers
- Nachfrage-Techniken zur Konsolidierung von Abgrenzungswissen und Fehlerwissen
- metakognitive Impulse zur gemeinsamen Suche nach Fehlermustern und Ursachen
- Etablierung von Gesprächsregeln, um einen angemessenen Umgang miteinander zu sichern
- ...

Methoden zum aktivierenden Umgang mit Fehlern

- Rechen- und Strategiekonferenzen
- Partnerdiagnosen
- Hausaufgabenfolien
- Vorgaben für Berichtigung von Klassenarbeiten
- Fehlerhelferblatt und Fehlerkartei
- ...

Aufgaben für das gezielte Einspeisen typischer Fehler ...

- ... zum Finden und Widerlegen von typischen Fehlern
- ... zum Finden von versteckten Fehlern
- ... zum Identifizieren und Erklären von Fehlermustern
- ... zum Rekonstruieren von Fehlerursachen in kognitionsorientierten Aufgaben
- ... zum Entwickeln von Fehlerbearbeitungsstrategien

Manchmal stimmt es doch

1. Richtig oder falsch?

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

2. „Darf man so rechnen?“

$$\text{a) } \frac{16}{64} = \frac{1}{4}, \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}, \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}, \quad \frac{49}{98} = \frac{4}{8}?$$

$$\text{b) } \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{8}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{8}$$

$$\text{c) } \frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{15}{35} : \frac{14}{35} = 15 : 14 = \dots$$

$$\text{d) } 9^2 - 1^2 = 92 - 12 = 80$$

Lutz Führer

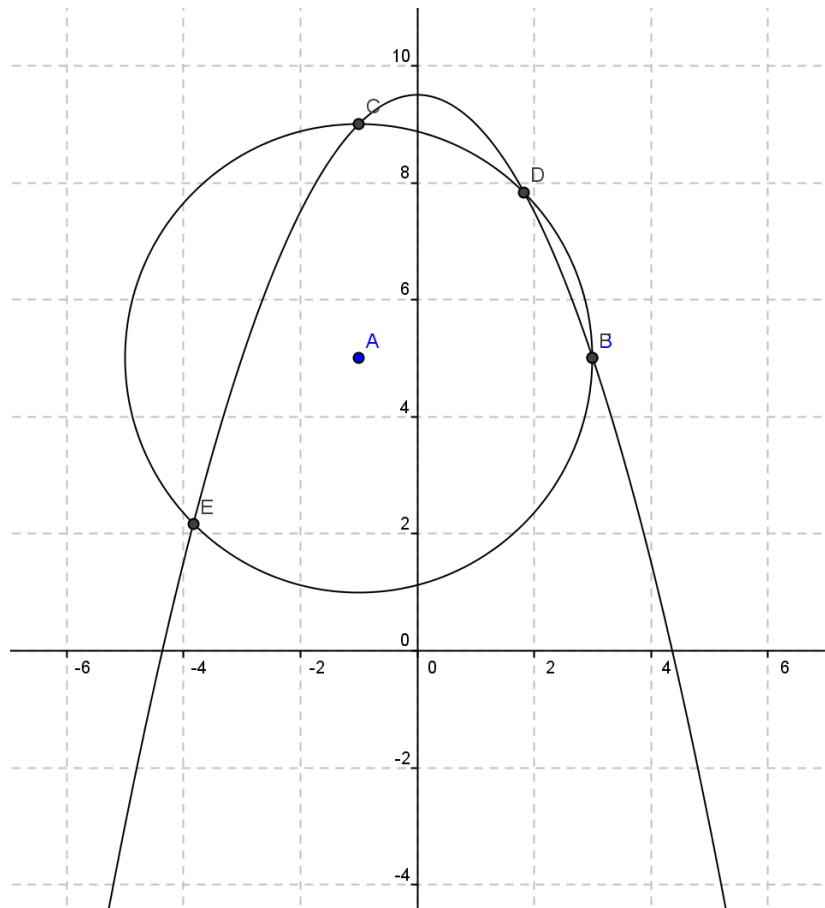
mathematik lehren, 5/August 84, S.21ff

3. Wie falsch ist das eigentlich?

- Ein Kreis um $(-1|5)$ soll mit einer Parabel geschnitten werden. Jemand rechnet:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & (x+1)^2 + (y-5)^2 = 4^2 \\ \text{(ii)} & x^2 + 2y = 19 \\ \hline \text{(i')} & x+1 + y-5 = 4 \\ \text{(i'')} & x + y = 8 \\ \text{(i''')} & y = 8 - x \\ \text{(i''')} \text{ in (ii)} & x^2 + 16 - 2x = 19 \\ & x_1 = -1 \quad ; \quad x_2 = 3 \\ & \mathbb{L} = \{(-1|9) ; (3|5)\} \end{array}$$

3. Wie falsch ist das eigentlich?



$$I \quad x^2 + 2x + y^2 - 10y + 25 = 16$$

$$II \quad x^2 + 2y = 19$$

$$I \quad x^2 + 2x + y^2 - 10y + 10 = 0$$

$$II \quad y = 9,5 - 0,25x^2$$

$$x^2 + 2x + (9,5 - 0,25x^2)^2 - 10(9,5 - 0,25x^2) + 10 = 0$$

$$x_1 = -3,828 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1,828 \quad x_4 = 3$$

Fragen für den Umgang mit Fehlern

- Kannst du dir vorstellen, um welche Art von Fehler es sich hier handelt?
- Hast du alle Angaben richtig verwendet?
- Versuche deinem Fehler auf die Spur zu kommen, indem du die Aufgabe noch einmal Schritt für Schritt durchgehst.
- Versuche deinem Fehler auf die Spur zu kommen, indem du konkrete Zahlen verwendest.
- Versuche deinem Fehler auf die Spur zu kommen, indem du dir eine Skizze machst.
- Überlege: „Kann es überhaupt sein, dass ...?“
- Welche Bedingung(en) müsste(n) erfüllt sein, wenn deine Aussage richtig wäre?
- Welche Konsequenz hätte deine Aussage?
- Kennst du eine ähnliche Aufgabe, die du bereits fehlerfrei gelöst hast?
- Welches Vorwissen brauchst du, um diesen Fehler korrigieren zu können?
- Wo könntest du nachschauen, wie dein Fehler korrigiert werden kann?
- Versuche dich deinem Fehler auf einem ganz anderen Weg zu nähern (z. B. mit einem Bild).
- Kannst du die Aufgabe, die du falsch gemacht hast, zunächst vereinfachen oder verändern oder in Teilprobleme zerlegen?
- Kennst du einen Spezialfall für diese Aufgabe?

Fragen für den Umgang mit Fehlerursachen

- Erkennst du deinen Fehler? Kannst du uns sagen, was dir dabei im Kopf herumgegangen ist?
- Kannst du bitte mal laut denken, während du die Aufgabe bearbeitest?
- Kannst du das aufschreiben, aufzeichnen, ein Beispiel nennen oder Ähnliches, damit ich verstehen kann, was du meinst?
- Auf welche Abbildung/Rechnung/Zahlen bezieht sich deine Antwort?
- Was genau hast du nicht richtig verstanden?
- Verstehe ich dich richtig, wenn ich sage ...?
- Kannst du deine Antwort bitte in anderen Worten noch einmal wiederholen?
- Muss es wirklich so sein, wie du es sagst? Gibt es eine Konstellation, in der es nicht unbedingt so sein muss?

Wie kann eine Lehrkraft in Fehlersituationen ermutigen?

- Betonung, dass Fehler etwas Selbstverständliches und nichts „Schlimmes“ sind.
- Aufforderung zur eigenständigen Korrektur ohne Tadel, sondern mit wirklichem Interesse am Denken der Einzelnen.
- Keine ungeduldigen oder sarkastischen Reaktionen seitens der Lehrkraft.
- Negative emotionale Reaktionen der Klasse (wie Auslachen oder Meckern) werden unterbunden.
- Belohnung einer erfolgreichen Korrektur des Fehlers mit differenziertem Lob.

Für welche Zahlen x und y mit der Summe 2 ist der Term $x^2 + y^2$ minimal?

Lösung

1. *Schritt*: Eine Variable wird eliminiert.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= x^2 + (2 - x)^2 \\&= x^2 + 4 - 4x + x^2 \\&= 2x^2 - 4x + 4\end{aligned}$$

Die quadratische Funktion $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$ soll also minimal werden.

2. *Schritt*: Der Scheitelpunkt der Parabel wird ermittelt.

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x^2 - 2x + 2) = 2(x^2 - 2x + 1 + 1) = 2[(x - 1)^2 + 1]$$

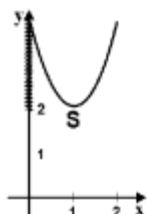
$$f(x) = 2(x - 1)^2 + 2$$

Aus dieser Punkt-Scheitel-Form können wir nun die Koordinaten des Scheitelpunktes ablesen:

$$S(1 \mid 2)$$

3. *Schritt*: Die Ergebnisse werden veranschaulicht und gedeutet.

Die Parabel sieht so aus:



Die tatsächlich angenommenen Funktionswerte wurden auf der y-Achse schraffiert.

Der kleinste schraffierte y-Wert ist $y = 2$.

Dieser Wert wird an der Stelle $x = 1$ angenommen.

Der Scheitelpunkt der Parabel ist $S(1 \mid 2)$.
 $\begin{matrix} x & y \end{matrix}$

Das Minimum ist also 2 und es wird an der Stelle $x = 1$ angenommen:

$$\begin{matrix} f(1) = 2 \\ x & y \end{matrix}$$

Das Schaubild bzw. diese Überlegungen führen nun zum Ergebnis:

Antwort: Die gesuchten Zahlen sind $x = 1$ und $y = 2$.

Checkliste für die von den Lehrkräften praktizierte Fehlerkultur

1. Aufspüren von fehlerhaften Denkkonzepten

- Habe ich den Fehler im Unterricht ernst genommen und nicht als Flüchtigkeitsfehler abgetan?
- Habe ich meine Möglichkeiten ausgeschöpft, die Fehlerursachen zu verstehen?
- Konnte ich mich in diese fehlerhaften Denkstrategien hineinversetzen?
- ...

2. Eigenaktivitäten der Lernenden

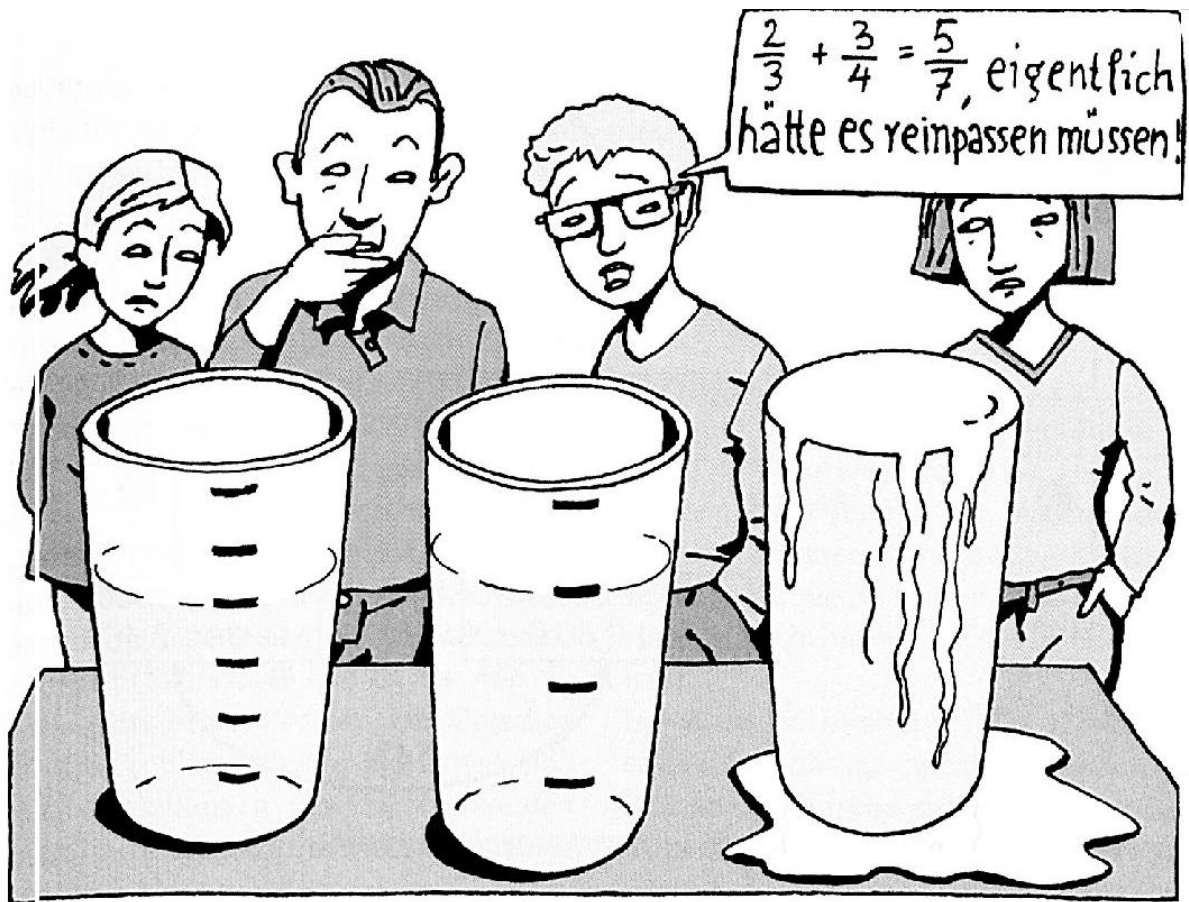
- Waren die Schülerinnen und Schüler in der Fehlersituation selbst aktiv und habe ich mich zurückgenommen?
- Konnten die Lernenden an ihr Vorwissen anknüpfen?
- Habe ich bei der Fehlerkorrektur Begründungen eingefordert, um das mathematische Verständnis zu verbessern?
- Hatten die Lernenden genügend hilfreiche Visualisierungen (z. B. Skizzen) und Verstehenshilfen?
- ...

3. Didaktisch-methodische Entscheidungen

- Habe ich eher ergebnisorientiert oder prozessorientiert reagiert?
- Könnte mein unterrichtliches Handeln den Schülerfehler begünstigt haben?
- Waren meine Zahlenbeispiele, Medien und Arbeitsformen geschickt gewählt?
- ...

4. Lernatmosphäre

- War die Lernatmosphäre in der Fehlersituation für alle angenehm?
- Habe ich mich genügend um diejenigen gekümmert, die noch Schwierigkeiten hatten?
- Habe ich ausreichend Zeit zum Nachdenken, Nachfragen, Reflektieren gegeben?
- Habe ich die Lernenden ermutigt, Fragen zu stellen, wenn sie etwas nicht verstanden haben?
- Werden die Lernenden bei persönlichen Gesprächen über Fehler nervös oder verunsichert?
- Lehnen die Lernenden die Verantwortung für ihre Fehler ab?
- ...



Quellen:

- PM Heft 27 Juni 2009
- Mathematiklehren 5/August 84
- Furdek, Attila: Der Fehler-Beschwörer.
- Zech, Friedrich: Grundkurs der Mathematikdidaktik