HU Berlin Wintersemester 2009/10

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 04.01.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 10 (30+50 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ und die linearen Abbildungen $f, g, h \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, welche gemäß

$$f\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\xi_1+\xi_2+\xi_3\\ \xi_1+\xi_2\end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\xi_1+\xi_3\\ \xi_1+\xi_2\end{pmatrix}, \quad h\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\xi_2\\ \xi_1\end{pmatrix}$$

definiert sind. Zeigen Sie, dass f, g, h linear unabhängig sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis. Zwei lineare Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien durch ihre (bezüglich der Standardbasis) zugeordneten Matrizen

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{(resp.)}$$

gegeben. Geben Sie die zugeordneten Matrizen der linearen Abbildungen $f \circ f$, $g \circ f$ und $f \circ g$ an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bestimmen Sie den Rang der drei folgenden Matrizen mit reellen Koeffizienten:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -2 & 4 & 6\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 6\end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 3\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

$\star$ Zusatzaufgaben zu Weihnachten $\star$

Für die Zulassung zur Klausur benötigen Sie 60% der Maximalpunktzahl der Punkte der Übungsaufgaben von Serie 1 bis einschließlich Serie 12. Wiederholen und lernen Sie zur Klausurvorbereitung Definitionen und Sätze der Vorlesung. Überlegen Sie sich zu jedem Begriff ein Beispiel und ein Gegenbeispiel. Thematisieren Sie eventuell auftretende Fragen auch in Ihrer Übung.

Aufgabe 4* (2+2+2+1+1+1+1=10 Punkte)
Geben Sie jeweils eine Definition des folgenden Begriffes an:

(a) Abelsche Gruppe.

(b) $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(c) Basis eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes.

(d) Erzeugendensystem eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes.

(e) Lineare Unabhängigkeit von n Vektoren eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes.

(f) Endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(g) Dimension eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes.

Aufgabe 5* (2+1+2+1+2+3+1=12 Punkte)
Geben Sie jeweils eine Definition des folgenden Begriffes an:

(a) Linearer Unterraum eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes.

(b) Affiner Unterraum eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes.

(c) Summe und Durchschnitt zweier linearer Unterräume eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes.

(d) Linearer Span von n Vektoren eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes.

(e) Lineare Abbildung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

(f) Kern, Bild und Rang einer linearen Abbildung.

(g) Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

Aufgabe 6* (2+2+2+2=8 Punkte)
Formulieren Sie jeweils den folgenden Satz:

(a) Austauschsatz von Steinitz.

(b) Dimensionsformel für lineare Unterräume.

(c) Lineare Fortsetzung einer linearen Abbildung.

(d) Dimensionsformel für Kern und Bild einer linearen Abbildung.

Aufgabe 7* (10 Punkte)
Betrachten Sie drei $\mathbb{R}$-Vektorräume V_1, V_2, V_3 und eine Folge linearer Abbildungen

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \xrightarrow{f_3} \{0\}$$

mit der Eigenschaft, dass

$$\operatorname{im}(f_j) = \ker(f_{j+1}) \qquad (j = 0, 1, 2)$$

gilt. Eine Folge linearer Abbildungen mit dieser Eigenschaft heißt *exakt*.

(a) Zeigen Sie, dass f_1 injektiv und f_2 surjektiv ist. Zeigen Sie weiter, dass

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_2) = \dim_{\mathbb{R}}(V_1) + \dim_{\mathbb{R}}(V_3)$$

gilt.

(b) Sei nun $V_1 = \mathbb{R}^2, V_2 = \mathbb{R}^3, V_3 = \mathbb{R}$ und $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f_1\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 2\xi_1 - \xi_2 \\ 3\xi_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen sie alle linearen Abbildungen $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ derart, dass die Folge

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_2} \mathbb{R} \xrightarrow{f_3} \{0\}$$

exakt ist.

Aufgabe 8* (10 Punkte)
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Für $m \in \mathbb{Z}$ definieren wir das Symbol $[m]_p$, das für $m, n \in \mathbb{Z}$ durch die Eigenschaft

$$[m]_p = [n]_p \Longleftrightarrow p|(m - n)$$

charakterisiert ist. Beispielsweise gilt für $p = 3$ die Gleichheit $[17]_3 = [32]_3$, da 3 die Differenz $17 - 32 = -15$ teilt.
Das Symbol $[m]_p$ heißt *reduziert*, falls $m \in \{0, \dots, p-1\}$ ist. Beispielsweise ist $[2]_3$ ein reduziertes Symbol.
Wir definieren die Menge

$$\mathbb{F}_p := \big\{[m]_p \,\big|\, m \in \mathbb{Z}\big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{F}_p$ genau p Elemente enthält, indem Sie zeigen, dass

$$\mathbb{F}_p = \big\{[0]_p, [1]_p, \dots, [p-1]_p\big\}$$

gilt.

Bitte wenden!

(b) Wir definieren eine Addition $\oplus : \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ und eine Multiplikation $\odot : \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ gemäß

$$[m]_p \oplus [n]_p := [m+n]_p \,,$$
$$[m]_p \odot [n]_p := [m \cdot n]_p \,.$$

Für $p = 3$ lassen sich $\oplus$ und $\odot$ mit reduzierten Symbolen wie folgt darstellen:

$\oplus$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[0]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[1]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$
$[2]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$

$\odot$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[0]_3$	$[0]_3$	$[0]_3$	$[0]_3$
$[1]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[2]_3$	$[0]_3$	$[2]_3$	$[1]_3$

Erstellen Sie die analogen Tabellen mit reduzierten Symbolen für $p = 2$ und $p = 7$.

(c) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{F}_p, \oplus)$ und $(\mathbb{F}_p \backslash \{[0]_p\}, \odot)$ für $p = 7$ abelsche Gruppen sind.
Hinweis: Verwenden Sie die in Teilaufgabe (b) erstellten Tabellen für $p = 7$.

(d) Bestimmen Sie für $p = 2$, $p = 3$ und $p = 7$ jeweils die Menge aller 3-Tupel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_p^3,$$

welche das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} ([15]_p \odot x_1) & \oplus & ([14]_p \odot x_2) & \oplus & ([13]_p \odot x_3) & = & [0]_p \\ ([30]_p \odot x_1) & \oplus & ([6]_p \odot x_2) & \oplus & ([40]_p \odot x_3) & = & [0]_p \\ ([31]_p \odot x_1) & \oplus & ([28]_p \odot x_2) & \oplus & ([11]_p \odot x_3) & = & [0]_p \end{array}$$

erfüllen.

$\star$ **Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr 2010!** $\star$