Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 05.01.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 10 (20+20 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\mathfrak{B}$ sowie der geordneten Basis

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Weiterhin betrachten wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum $W = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\mathfrak{C}$ sowie der geordneten Basis

$$\mathfrak{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Geben Sie die Basistransformationsmatrizen für den Basiswechsel von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}'$ und von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{C}'$ an.

(b) Geben Sie die Basistransformationsmatrix für den Basiswechsel von $\mathfrak{C}'$ nach $\mathfrak{C}$ an.

(c) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei bezüglich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie mittels der Basistransformationsformel die Matrix von f bezüglich der Basen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathfrak{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine geordnete Basis von V. Dann induziert die Einschränkung φ' des Vektorraum-Isomorphismus $\varphi : \mathrm{L}(V) \longrightarrow \mathrm{M}_n(K)$ auf $\mathrm{GL}(V)$, d.h. $\varphi' = \varphi|_{\mathrm{GL}(V)}$, einen Gruppen-Isomorphismus

$$\varphi' : (\mathrm{GL}(V), \circ) \longrightarrow (\mathrm{GL}_n(K), \cdot).$$

(b) Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f_A : (\mathrm{GL}_n(K), \cdot) \longrightarrow (\mathrm{GL}_n(K), \cdot),$$

definiert durch $B \mapsto A^{-1} \cdot B \cdot A$, ein Gruppen-Isomorphismus ist.

Aufgabe 3* (20 Punkte)

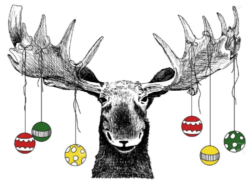
Die Weltwirtschaftskrise ist auch am Nordpol nicht spurlos vorübergezogen. Der Weihnachtsmann hat deswegen beschlossen, seine Schlittenbespannung von Rentieren auf die kostengünstigeren und robusteren Elche umzustellen. Die großen Schlitten für die nördliche Hemisphäre sollen nun jeweils statt von 5 braunen, 3 gesprenkelten und einem rotnasigen Rentier von 3 schwarzen, 2 weißen und einem grauen Elch gezogen werden. Die mittleren Schlitten, die die Äquatorialregion bedienen, werden statt mit 3 braunen und 2 gesprenkelten Rentieren nun mit einem schwarzen, einem weißen und einem grauen Elch bespannt und an den kleinen Schlitten für die südliche Hemisphäre wird das einzelne rotnasige Rentier durch einen weißen und einen grauen Elch ersetzt.

(a) Die IT-Fee ist sauer. Gerade hat sie das Programm zur Berechnung der diesjährigen Geschenkeverteilung fertiggestellt. Gibt man dort die Anzahl der eingesetzten Rentiere in Form eines Vektors

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

ein, wobei ξ_1 die Anzahl der braunen, ξ_2 die Anzahl der gesprenkelten und ξ_3 die Anzahl der rotnasigen Rentiere bezeichnet, so bestimmt das Programm daraus die Anzahl der Schlitten der jeweiligen Sorten, multipliziert mit deren Traglast und teilt dann die Geschenkezahl per Bravheitsalgorithmus auf die Menschheit auf. Dies alles geschieht durch Multiplikation von x mit einer Matrix $A = (\alpha_{k,j})$; der Output ist ein Vektor $y = A \cdot x$, der so viele Einträge hat, wie es Menschen gibt. Am k-ten Eintrag von y kann dann abgelesen werden, wieviele Geschenke der Mensch mit der Nummer k erhält. Gerade will sie das Programm löschen und neu schreiben, so dass man nun die Anzahl der Elche als Vektor eingeben kann. „Halt", denkt sie sich da. „Es reicht ja, wenn ich die Matrix A durch ein Produkt $A \cdot B$ ersetze, und B kann ich ganz einfach berechnen." Wie sieht B aus?

(b) Der Buchhalter-Elf will prüfen, wieviel durch die Umstellung von Rentieren auf Elche tatsächlich gespart wird. Er fragt bei den Stallbeamten die Anzahl der benötigten Rentiere bzw. Elche an, diese sind jedoch wegen bevorstehender Lohnkürzungen gerade im Streik. Von der IT-Fee bekommt er immerhin folgende Informationen:
Ein einzelner großer Schlitten würde Mensch Nr. 5 aus Sibirien 2 Geschenke bringen, ein mittlerer Schlitten bringt Mensch Nr. 17 aus Kenia 2 Geschenke und ein kleiner Schlitten hat 6 Geschenke für Mensch Nr. 123 aus Feuerland im Gepäck. Die Fee bemerkt außerdem, dass die diesjährige Geschenkeanzahl für Mensch Nr. 5 zufällig genau mit dem Eintrag $\alpha_{5,1}$ von A übereinstimmt, die für Mensch Nr. 17 mit dem Eintrag $\alpha_{17,2}$ und die für Mensch Nr. 123 mit dem Eintrag $\alpha_{123,3}$. Wenn ein Rentier im Unterhalt 1000 Kronen pro Jahr kostet, ein rotnasiges sogar 1500 Kronen, ein Elch jedoch nur mit 700 Kronen zu Buche schlägt, wieviel kann der Weihnachtsmann dann pro Jahr durch die Umstellung sparen?



⋆ Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr 2016! ⋆