HU Berlin Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 28.06.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 10 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Punkte

$$P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathrm{aff}}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathrm{aff}}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathrm{aff}}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathrm{aff}}$$

eine (geordnete) affine Basis des Raums $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ bilden, und geben Sie die affinen Koordinaten des Punktes $P = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathrm{aff}} \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ bezüglich dieser affinen Basis an.

(b) Im affinen Raum $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ seien die Punkte

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathrm{aff}}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathrm{aff}}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathrm{aff}}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathrm{aff}}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Dimension des kleinsten affinen Unterraums von $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, der diese vier Punkte enthält, und geben Sie ein lineares Gleichungssystem für diesen Unterraum an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir betrachten den affinen Raum $\mathbb{A}^3(\mathbb{F}_5)$.

(a) Wie viele Punkte hat $\mathbb{A}^3(\mathbb{F}_5)$?

(b) Wie viele Geraden gibt es in $\mathbb{A}^3(\mathbb{F}_5)$?

(c) Wie viele Ebenen gibt es in $\mathbb{A}^3(\mathbb{F}_5)$?

(d) Wie viele parallele Geraden zu einer fixierten Geraden gibt es?

(e) Wie viele windschiefe Geraden zu einer fixierten Geraden gibt es?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien $\mathbb{A}(W_1) \lhd \mathbb{A}(W_2)$ zwei schwach parallele affine Unterräume von $\mathbb{A}(V)$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt entweder $\mathbb{A}(W_1) \subsetneqq \mathbb{A}(W_2)$ oder $\mathbb{A}(W_1) \cap \mathbb{A}(W_2) = \emptyset$.

(b) Es existiert ein affiner Unterraum $N \subsetneqq \mathbb{A}(W_2)$ mit der Eigenschaft $N \parallel \mathbb{A}(W_1)$.

(c) Beweisen Sie: Eine affine Gerade G und eine affine Hyperebene H im Raum $\mathbb{A}^n(K)$ sind entweder (schwach) parallel oder haben genau einen Schnittpunkt.