HU Berlin Sommersemester 2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 21.06.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 10 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Matrizen A_j jeweils eine orthogonale Matrix S_j derart, dass $S_j^t A_j S_j$ $(j = 1, 2, 3)$ Diagonalform besitzt:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Die Menge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 11\xi_1^2 + 2\sqrt{3}\,\xi_1\xi_2 + 9\xi_2^2 = 24 \right\}$$

beschreibt eine Ellipse im $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine positive Drehung des Standardkoordinatensystems des $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung derart, dass die Koordinatenachsen des neuen Koordinatensystems die beiden Symmetrieachsen der Ellipse bilden. Bestimmen Sie überdies die Länge der Halbachsen der Ellipse.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ besitzt höchstens die reellen Eigenwerte $+1$ und -1.

(b) Die komplexen Eigenwerte einer orthogonalen Matrix $S \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ liegen auf dem Einheitskreis, d.h. sie sind von der Form $\lambda = e^{i\alpha}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Eine zylindrische Schwungscheibe (Radius $r = 30$cm, Höhe $2h = 60$cm, Masse $m = 1$kg) hat am Rand eine punktförmige Unwucht der Masse $M = 0,1$kg. Der Trägheitstensor bezüglich des Koordinatensystems mit dem Ursprung im Grundkreismittelpunkt des Zylinders und der ξ_3-Achse in Richtung der Zylinderachse lautet

$$J = \begin{pmatrix} \frac{m}{12}(3r^2 + 4h^2) + Mh^2 & 0 & -Mrh \\ 0 & \frac{m}{12}(3r^2 + 4h^2) + M(r^2 + h^2) & 0 \\ -Mrh & 0 & \frac{m}{2}r^2 + Mr^2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die *Hauptträgheitsmomente* (Eigenwerte) und die *Hauptträgheitsachsen* (Eigenvektoren) von J.