# Übungsaufgaben zur Vorlesung
# **Algebra und Funktionentheorie**

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 17.01.2011 in der Vorlesung

**Serie 10 ( Punkte)**

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Seien $E := K(X_1, \ldots, X_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in den $n$ Variablen $X_1, \ldots, X_n$ über dem Körper $K$ und $S_n$ die symmetrische Gruppe zu $n$ Elementen. Eine Permutation $\pi \in S_n$ definiert einen $K$-Isomorphismus auf $E$ durch $\pi(a) = a$ $(a \in K)$ und $\pi(X_j) = X_{\pi(j)}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Schließlich bezeichne $\sigma_j$ das $j$-te elementarsymmetrische Polynom in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$, d.h.

$$\sigma_j(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_j \leq n} X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_j}.$$

Zeigen Sie, dass $K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = E^{S_n}$ gilt, d.h. dass jede symmetrische Funktion in $X_1, \ldots, X_n$ eine rationale Funktion in $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ist.

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien $K$ ein Körper und $f \in K[X]$ ein separables Polynom vom Grad $n$ mit den Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in seinem Zerfällungskörper $L$. Die *Diskriminante* $\Delta(f)$ *von* $f$ ist definiert durch

$$\Delta(f) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\alpha_j - \alpha_k)^2 \neq 0.$$

Weiter sei vorausgesetzt, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ gleich der symmetrischen Gruppe $S_n$ zu $n$ Elementen ist. Zeigen Sie, dass $[K\big(\sqrt{\Delta(f)}\big) : K] = 2$ gilt.
(*Hinweis:* Hauptsatz der Galoistheorie).

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bestimmen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen komplex-differenzierbar sind und geben sie gegebenenfalls ihre Ableitungen an:

(i) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := az + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$,

(ii) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := \mathrm{Re}(z)$,

(iii) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := z^2$,

(iv) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := \overline{z}$.

**Aufgabe 4 (10 Punkte)**

Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, d.h. eine offene und wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$, und $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a,b] \longrightarrow U \subseteq \mathbb{C}$ wird als *Weg* bezeichnet. Weiter sei $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Dann ist das sogenannte *Wegintegral von $f$ entlang* $\gamma$ definiert durch

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_\gamma f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t := \int_a^b \mathrm{Re}\big(f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\big)\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}\big(f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\big)\mathrm{d}t.$$

Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale:

(i) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$ für $\gamma : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) := t + it$,

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$ für $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) := \cos(t) + i\sin(t)$,

(ii) $\displaystyle\int_\gamma |z|^2\mathrm{d}z$ für $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) := r(\cos(t) + i\sin(t))$ $(r \in \mathbb{R}_{>0})$.

**Aufgabe 5* (10 Punkte)**

Gegeben sei das Polynom $f(X) = 2X^5 - 10X + 5 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie, dass $f$ nicht durch Radikale auflösbar ist.