HU Berlin Sommersemester 2011

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 20.06.2011 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 10 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Wir definieren den *Polynomring* $(R[X], +, \cdot)$ *in der Unbestimmten* X *mit Koeffizienten aus* R als die Menge

$$R[X] := \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \,\middle|\, a_j \in R,\ a_j = 0 \text{ für fast alle } j \in \mathbb{N} \right\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \right) + \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \cdot X^j \right) := \sum_{j \in \mathbb{N}} (a_j + b_j) \cdot X^j,$$

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \right) \cdot \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \cdot X^j \right) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\substack{k,\ell \in \mathbb{N} \\ k+\ell=j}} (a_k \cdot b_\ell) \right) \cdot X^j.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(R[X], +, \cdot)$ ein Ring ist.

(b) Beweisen Sie, dass $R[X]$ genau dann kommutativ ist, wenn R kommutativ ist.

(c) Weisen Sie nach, dass die Einheiten von $R[X]$ genau den Einheiten von R entsprechen, falls R sogar ein Integritätsbereich mit Einselement ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie, dass dann für $a, b, c \in R$ die folgenden Rechenregeln gelten:

(i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

(ii) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

(iv) $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$.

(v) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Einheiten eines Rings $(R, +, \cdot)$ mit Einselement 1 mit der Multiplikation eine Gruppe bilden.

(b) Bestimmen Sie die Gruppe der Einheiten für die Ringe $(\mathcal{R}_n, \oplus, \odot)$, wobei $n = 5, 8, 10, 12$ ist. Welche dieser Gruppen sind zueinander isomorph?

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Es sei E eine Menge mit mindestens zwei Elementen und $\mathcal{P}(E)$ die Potenzmenge von E, d.h. die Menge aller Teilmengen von E. Auf $\mathcal{P}(E)$ betrachten wir die Verknüpfungen $\cup$, $\cap$ und die symmetrische Differenz Δ, welche für $A, B \in \mathcal{P}(E)$ durch

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$ kein Ring ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

(c) Bestimmen Sie die Nullteiler und Einheiten von $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$.