HU Berlin Sommersemester 2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Dr. Anna v. Pippich

Abgabetermin: 17.06.2013 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 10 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Die *Eulersche φ-Funktion* ist für $n \in \mathbb{N}$ definiert als

$$\varphi(n) = \left|\left\{a \in \mathbb{N} \,\middle|\, (a,n) = 1 \text{ und } 1 \leq a \leq n\right\}\right|,$$

d.h. $\varphi(n)$ ist die Anzahl der zu n teilerfremden, positiven ganzen Zahlen kleiner gleich n.

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi(p) = p - 1$ für $p \in \mathbb{P}$ gilt.

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$, nicht beide zugleich 0, und $d = (a,b)$. Beweisen Sie, dass $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \cdot a + y \cdot b = d$ existieren.

(c) Verwenden Sie Teilaufgabe (b), um die Gleichheit

$$\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$$

für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, zu zeigen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$ mit $(a,n) = 1$. Verwenden Sie Aufgabe 1(c), um

$$n \,\big|\, (a^{\varphi(n)} - 1)$$

zu zeigen.

(b) Es seien $p \in \mathbb{P}$ und $a \in \mathbb{N}$. Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 1(a) und Teilaufgabe (a) die Teilbarkeit

$$p \,\big|\, (a^p - a).$$

Dies ist der sogenannte *kleine Satz von Fermat*.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie für $a, b, c, d \in K$, $b, d \neq 0$, die Gültigkeit der folgenden Rechenregeln:

(i)
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}.$$

(ii)
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Darstellung der Form
$$n = \sum_{j=0}^{\ell} q_j \cdot g^j$$
mit natürlichen Zahlen $0 \leq q_j \leq g-1$ ($j = 0, \ldots, \ell$) und $g_\ell \neq 0$ besitzt. Dies ist die sogenannte *g-adische Darstellung von n* und wir schreiben $n = {q_\ell q_{\ell-1} \ldots q_0}_g$. Ist $g = 10$, so lassen wir den Index g weg und schreiben wie üblich $n = q_\ell q_{\ell-1} \ldots q_0$.

(b) Bestimmen Sie die g-adische Darstellung der natürlichen Zahl 153 für $g = 2, 5, 10$.

(c) Entscheiden Sie, wann eine 2-adische Zahl $n = {q_\ell q_{\ell-1} \ldots q_0}_2$ durch 11_2 teilbar ist.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass $\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist.

(b) Betrachten Sie die Menge
$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) := \{a + b \cdot \sqrt{3} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$$
zusammen mit den Verknüpfungen
$$(a + b \cdot \sqrt{3}) + (c + d \cdot \sqrt{3}) = (a + c) + (b + d) \cdot \sqrt{3},$$
$$(a + b \cdot \sqrt{3}) \cdot (c + d \cdot \sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc) \cdot \sqrt{3}.$$
Ist dann $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ ein Körper? Beweisen Sie Ihre Aussage unter Verwendung Ihres Wissens über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$!