HU Berlin Wintersemester 2013/14

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 06.01.2014 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 10 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Es sei V_d der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich d mit reellen Koeffizienten. Die Ableitung eines Polynoms $p(X) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j X^j$ ist durch $p'(X) = \sum_{j=1}^{d} j\alpha_j X^{j-1}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : V_d \longrightarrow V_{d-1},$$

gegeben durch die Zuordnung $p(X) \mapsto p'(X)$, linear ist. Welchen Ihnen bekannten Ableitungsregeln entspricht die Linearität von f? Bestimmen Sie $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$.

(b) Geben sie die Koordinaten der Monome $1, \ldots, X^d$ bezüglich der (geordneten) Standardbasis $\{1, X, \ldots, X^d\}$ von V_d und die Koordinaten ihrer Bilder $f(1), \ldots, f(X^d)$ bezüglich der (geordneten) Standardbasis $\{1, X, \ldots, X^{d-1}\}$ von V_{d-1} an.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Es seien V und W reelle Vektorräume. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann linear, wenn die Gleichheit

$$f\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(v_j)$$

für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ erfüllt ist.

(b) Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Das Bild $f(U) \subseteq W$ eines linearen Unterraums $U \subseteq V$ ist ein linearer Unterraum von W.

(c) Nicht jede surjektive lineare Abbildung ist auch injektiv.

(d) Ist $f : V \to W$ linear und injektiv und ist die Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ $(n \geq 1)$ linear unabhängig, dann ist auch $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\} \subset W$ linear unabhängig.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Betrachten Sie den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 3\xi_1 + \xi_2 - 3\xi_3 \\ 2\xi_2 \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die linearen Unterräume $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$. Geben Sie einen linearen Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^3$ an, für den $U \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^3$ gilt (siehe Serie 8, Aufgabe 1).

Aufgabe 4* (10 Punkte)
Zur schnelleren Auslieferung der Geschenke hat Knecht Ruprecht für den Weihnachtsmann einen Geschenkeverteiler gebaut, der die Geschenke mittels einer ausgetüftelten Mechanik und eines Katapults direkt in die Schornsteine befördert. Dazu müssen die Koordinaten des entsprechenden Schornsteins in die Maschine eingegeben werden, die das Geschenk dann in ebendiesen katapultiert.
Unglücklicherweise kam es im Stress der Vorweihnachtszeit zu einem üblen Streit zwischen dem Weihnachtsmann und Knecht Ruprecht, worauf letzterer an einigen Stellschrauben der Maschine drehte und in ein geheimes Kurhotel in den Schweizer Bergen verschwand. Infolge von Knecht Ruprechts Sabotageakt wird nun ein Geschenk bei Eingabe der Schornsteinkoordinaten $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ zu den Koordinaten $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right)$ katapultiert. Die Funktion f kennt der Weihnachtsmann selbstverständlich nicht, er weiß aus der Konstruktion der Maschine nur, dass f linear sein muss.
Er führt nun zwei Testläufe durch und notiert, dass bei Eingabe der Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 6{,}8 \\ 5{,}1 \end{pmatrix}$ die Schornsteine mit Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{134}{17} \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 7{,}82 \\ 30{,}82 \end{pmatrix}$ getroffen werden.

(a) An welchen Schornstein wird bei Eingabe der Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ 20{,}6 \end{pmatrix}$ geliefert? Geben Sie die Koordinaten des Schornsteins in Dezimalschreibweise an.

„Aber“, protestiert ein Rentier, das die Arbeitslosigkeit fürchtet, „es ist doch offensichtlich, dass wir mit dieser Maschine so nicht an beliebige Schornsteine ausliefern können!“

(b) Was muss für die Koordinaten eines Schornsteins gelten, damit er beliefert werden kann?

(c) Geben Sie alle möglichen Koordinaten an, bei deren Eingabe das Geschenk im Schornstein mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} 17 \\ 67 \end{pmatrix}$ landet.

$\star$ **Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr 2014!** $\star$