HU Berlin Sommersemester 2014

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 23.06.2014 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 10 (40+5 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Matrizen A_j jeweils eine orthogonale Matrix S_j derart, dass $S_j^t A_j S_j$ $(j = 1, 2, 3)$ Diagonalform besitzt:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein r-dimensionaler $(0 \leq r \leq n)$ linearer Unterraum mit Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_r\}$. Es sei $P_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die orthogonale Projektion auf U, gegeben durch

$$P_U(v) = \sum_{j=1}^{r} \langle u_j, v \rangle u_j.$$

(a) Zeigen Sie, dass P_U selbstadjungiert ist.

(b) Es bezeichne $U^\perp$ das orthogonale Komplement zu U (siehe Serie 9, Aufgabe 2). Verifizieren Sie für alle $v \in \mathbb{R}^n$ den Satz des Pythagoras, d.h. die Gleichheit

$$\|v\|^2 = \|P_U(v)\|^2 + \|P_{U^\perp}(v)\|^2.$$

Hinweis: Ergänzen Sie $\mathcal{B}$ mittels einer Orthonormalbasis von $U^\perp$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.

(c) Es sei $Q = (u_1 \ldots u_r) \in \mathrm{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ die Matrix mit den Basisvektoren $u_1, \ldots, u_r \in \mathcal{B}$ von U als Spalten. Zeigen Sie, dass die Matrizen A von P_U und B von $P_{U^\perp}$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ durch

$$A = QQ^t \quad \text{bzw.} \quad B = E - QQ^t$$

gegeben sind.

(d) Es sei nun $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Matrix von $P_{U^\perp}$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ auf zwei verschiedene Arten: Verwenden Sie einerseits die Formel für B aus (c). Verwenden Sie andererseits die Formel für A aus (c), wobei Sie U durch $U^\perp$ ersetzen und eine Orthonormalbasis für $U^\perp$ wählen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine selbstadjungierte Abbildung. Zeigen Sie, dass zwei Eigenvektoren von f zu zwei verschiedenen Eigenwerten immer senkrecht aufeinander stehen.

(b) Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ heißt *positiv definit*, falls $x^t Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Beweisen Sie, dass eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ genau dann positiv definit ist, wenn all ihre Eigenwerte echt positiv sind.

Aufgabe 4* (5 Punkte)

„Der Ball ist rund, und das Spiel dauert 90 Minuten“. Beweisen Sie unter diesen Annahmen: Auf der Oberfläche eines Fußballs, der zu Beginn der ersten Halbzeit und zu Beginn der zweiten Halbzeit am selben Anstoßpunkt im Stadion liegt, gibt es mindestens zwei Punkte, die zu diesen zwei Zeitpunkten jeweils unverändert am selben Ort im umgebenden Raum liegen.