HU Berlin Wintersemester 2009/10

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 11.01.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 11 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Betrachten Sie die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \; A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ -7 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie an, welche Matrizenprodukte der Form $A_j \cdot A_k$ $(j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\})$ existieren, und berechnen Sie diese.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie A^2, A^3, B^2, B^3. Geben Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}, n > 0$, eine Formel für A^n und B^n an und beweisen Sie diese.

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichheit $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

(c) Berechnen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1} und bestimmen Sie mit Hilfe von A^{-1} alle Lösungen

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

der Gleichung $A \cdot X = B_1$, bzw. $A \cdot X = B_2$, wobei

$$B_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Beweisen Sie, dass die Matrix B nicht invertierbar ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Betrachten Sie die in Serie 8, Aufgabe 1(e)*, definierte lineare Abbildung

$$f : P_3 \to P_3, \qquad f\big(p(t)\big) = p'(t).$$

(a) Bestimmen Sie die f zugeordnete Matrix A bzgl. der geordneten Basen

$$\mathfrak{B} = \{1, (1-t), (1-t)^2, (1-t)^3\}, \quad \mathfrak{C} = \{1, t, t^2, t^3\}.$$

(b) Berechnen Sie A^2, A^3, A^4 und beweisen Sie, dass die Matrix $E + A$ invertierbar ist. Hierbei bezeichne $E \in M_4(\mathbb{R})$ die Einheitsmatrix.
Hinweis: Berechnen Sie $(E + A) \cdot (E - A + A^2 - A^3)$.

(c) Betrachten Sie die Matrix A^k $(k = 1, 2, 3, 4)$ als Abbildung $A^k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, welche einem Vektor

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

den Vektor $A^k \cdot X \in \mathbb{R}^4$ zuordnet. Beweisen Sie, dass

$$\ker(A) \subsetneq \ker(A^2) \subsetneq \ker(A^3) \subsetneq \ker(A^4) = \mathbb{R}^4$$

gilt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Betrachten Sie drei Matrizen $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in M_{r,s}(\mathbb{R})$ und bestimmen Sie, für welche $m, n, p, q, r, s \in \mathbb{N}$ die Ausdrücke

$$(A \cdot B) \cdot C \quad \text{und} \quad A \cdot (B \cdot C)$$

definiert sind. Zeigen Sie, dass in den zutreffenden Fällen die Gleichheit

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

d.h. die Assoziativität der Matrixmultiplikation, gilt.