Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Dr. Anna v. Pippich

Abgabetermin: 24.06.2013 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 11 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, mit $(a, b) = 1$.

(a) Formulieren und beweisen Sie ein Kriterium dafür, wann $\frac{a}{b}$ eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung besitzt.

(b) Es seien $u, v \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{Z}$ derart, dass $b = 2^u 5^v d$ mit $(10, d) = 1$ gilt. Zeigen Sie, dass dann die Vorperiodenlänge der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{a}{b}$ durch $\max(u, v)$ und die Periodenlänge durch $\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}(10)$ gegeben ist.

(c) Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man aus einem gegebenen periodischen Dezimalbruch den Bruch $\frac{a}{b}$ zurückgewinnen kann. Wenden Sie dieses Verfahren auf die periodischen Dezimalbrüche $0,\overline{123}$ und $0,8\overline{3}$ an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Finden Sie eine rationale Cauchyfolge mit dem Grenzwert $\sqrt{7}$.

(b) Bestimmen Sie $\sqrt{7}$ bis auf die ersten zehn Nachkommastellen genau.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Geben Sie drei Beispiele reeller Nullfolgen an, deren Folgenglieder alle irrationale Zahlen sind.

(b) Überlegen Sie sich, dass die Zahl $0,\,101\,001\,000\,100\,001\ldots$ (d. h. es sollen sukzessive eine, zwei, drei usw. Nullen eingefügt werden) irrational ist. Geben Sie drei weitere Beispiele irrationaler Dezimalzahlen an.

(c) Entscheiden Sie, ob Analoga der folgenden Sätze der reellen Analysis auch im Bereich der rationalen Zahlen gelten:

1. Ist $[a, b]$ ein reelles Intervall und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ und $f(a) < 0 < f(b)$, dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.
2. Eine auf einem reellen Intervall differenzierbare Funktion mit überall positiver Ableitung ist dort streng monoton wachsend.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $d := (-22, 107)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus'.

(b) Stellen Sie den größten gemeinsamen Teiler d mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus' als ganzzahlige Linearkombination $d = -22 \cdot x + 107 \cdot y$ dar, indem Sie die ganzen Zahlen x, y explizit bestimmen.

(c) Betrachten Sie den Ring $(\mathcal{R}_{107}, \oplus, \odot)$ und bestimmen Sie explizit ein $x \in \mathcal{R}_{107}$, das der Gleichung $34 \odot x = 1$ genügt.

(d) Betrachten Sie den Ring $(\mathcal{R}_{23}, \oplus, \odot)$ und bestimmen Sie explizit ein $x \in \mathcal{R}_{23}$, das der Gleichung $x^{107} = 2$ genügt.

Hinweis: Verwenden Sie den Kleinen Satz von Fermat, d.h. Aufgabe 2(b) der Serie 10, welcher besagt, dass für $p \in \mathbb{P}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a, p) = 1$ die Gleichheit $R_p(a^{p-1}) = 1$ besteht.