HU Berlin Wintersemester 2013/14

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 13.01.2014 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 11 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien U, V und W reelle Vektorräume und $f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen.

(a) Beweisen Sie, dass die Hintereinanderausführung

$$g \circ f : U \longrightarrow W,$$

gegeben durch die Zuordnung

$$u \mapsto g(f(u)) \quad (u \in U),$$

ebenfalls eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass $g \circ f$ genau dann injektiv ist, wenn sowohl f als auch g injektiv sind. Gilt die gleiche Äquivalenz für die Surjektivität? Formulieren Sie eine entsprechende Behauptung und beweisen Sie diese.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 3\xi_1 + \xi_2 - 3\xi_3 \\ 2\xi_2 \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 \end{pmatrix}$$

aus Serie 10, Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Zuordnungsvorschrift, welche die Abbildung $f \circ f$ beschreibt, und berechnen Sie $\ker(f \circ f)$ und $\mathrm{im}(f \circ f)$.

(b) Es seien V ein reeller Vektorraum und $g : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Inklusionen $\ker(g) \subseteq \ker(g \circ g)$ und $\mathrm{im}(g \circ g) \subseteq \mathrm{im}(g)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Eine reelle Folge $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ heißt *arithmetisch*, wenn es ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = \delta$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ gibt. Es sei V_a die Menge aller arithmetischen Folgen.

(a) Auf V_a ist eine Addition durch

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) + (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots) := (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots)$$

und eine Skalarmultiplikation durch

$$\lambda \cdot (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) := (\lambda\alpha_0, \lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

gegeben. Zeigen Sie, dass V_a zusammen mit diesen Verknüpfungen ein reeller Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie weiter, dass V_a isomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.

Hinweis zu (b): Finden Sie eine bijektive lineare Abbildung $f : V_a \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Betrachten Sie den reellen Vektorraum $\mathrm{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ und die linearen Abbildungen $f, g, h \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, welche durch

$$f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 2\xi_1 + \xi_3 \\ \xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix}, \quad h\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 2\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

definiert sind. Geben Sie die zu den Abbildungen gehörigen Matrizen an. Zeigen Sie, dass f, g, h linear unabhängig sind.