HU Berlin Sommersemester 2014

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 30.06.2014 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 11 – Probeklausur (50+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Definieren Sie den Begriff der reellen Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und nennen Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die reelle Diagonalisierbarkeit der Matrix A.

(b) Es seien $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome von A und $S^{-1}AS$ die Gleichheit $p_A(t) = p_{S^{-1}AS}(t)$ besteht.

(c) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

mit dem charakteristischen Polynom $p_A(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 4$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, ihre algebraische und geometrische Vielfachheit sowie Basen der zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Definieren Sie den Begriff eines Skalarprodukts auf einem reellen Vektorraum V. Was besagt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung?

(b) Es sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Gramsche Matrix

$$A = (\langle e_j, e_k\rangle)_{j,k=1,2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Daten eine Orthonormalbasis $\{f_1, f_2, f_3\}$ des Euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S derart, dass $S^t AS$ Diagonalform besitzt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein n-dimensionaler Euklidischer Vektorraum. Wann heißt eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{L}(V)$ orthogonal? Wann heißt eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonal? Wie hängen die beiden Begriffe zusammen?

(b) Für welche Wahlen von $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \beta & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

orthogonal? Überprüfen Sie für den Fall $\alpha = \sqrt{3/4}, \beta = 1$, dass $\det(A)=1$ ist, A also eine Drehung beschreibt, und berechnen Sie Drehachse sowie Drehwinkel.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(a) Es sei $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass A mindestens einen reellen Eigenwert hat.

(b) Die Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ besitze λ als einzigen Eigenwert. Zeigen Sie, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn A von der Form $A = \lambda \cdot E$ ist.

(c) Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine lineare Abbildung $P : V \longrightarrow V$ heißt *Projektion*, falls $P^2 = P$ gilt. Zeigen Sie, dass eine Projektion P nur die Eigenwerte 0 oder 1 hat.

Aufgabe 6* (10 Punkte)
Es sei V ein reeller Vektorraum und $f \in \mathrm{L}(V)$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Hat $f^2 + f$ den Eigenwert -1, so hat f^3 den Eigenwert 1.