HU Berlin Sommersemester 2015

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 29.06.2015 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 11 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement. Wir definieren das von $a_1, \ldots, a_n \in R$ $(n \in \mathbb{N})$ erzeugte Ideal durch

$$(a_1, \ldots, a_n) := \{r_1 \cdot a_1 + \cdots + r_n \cdot a_n \mid r_j \in R\,,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

(a) Verifizieren Sie, dass $(a_1, \ldots, a_n)$ tatsächlich ein Ideal in R ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Ideal $(X^2 - 8X + 15, X^3 - 3X^2 + X - 3)$ im Ring $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$ ein Hauptideal ist.

(c) Finden Sie ein Ideal von $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$, welches kein Hauptideal ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben seien der Ring $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$ und eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass a genau dann Nullstelle des Polynoms $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ist, wenn ein Polynom $q(X) \in \mathbb{Z}[X]$ existiert, so dass $p(X) = q(X) \cdot (X - a)$ gilt.

(b) Beweisen Sie unter Anwendung des Isomorphiesatzes für Ringe, dass die Isomorphie

$$(\mathbb{Z}[X]/(X - a), +, \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +, \cdot)$$

besteht.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in K. Zeigen Sie, dass dann entweder $\mathfrak{a} = (0)$ oder $\mathfrak{a} = (1)$ gelten muss.

(b) Zeigen Sie, dass ein Ringhomomorphismus $f : (\mathbb{Q}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ entweder die Nullabbildung oder die Identität ist.

(c) Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Gibt es einen Ringhomomorphismus $f : (\mathbb{Q}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$, der nicht die Nullabbildung ist? Begründen Sie.