Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 12.01.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 11 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösungsmenge in der Form $L = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x = x^* + y, y \in L_0\}$ (x^* spezielle Lösung des linearen Gleichungssystems, L_0 Lösungsraum des zugeordneten homogenen linearen Gleichungssystems) an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \xi_1 & + & 3\xi_2 & + & 4\xi_3 & & & + & 2\xi_5 & = & 1 \\ 2\xi_1 & + & 5\xi_2 & + & 7\xi_3 & + & \xi_4 & & & = & 2 \\ 3\xi_1 & + & 8\xi_2 & + & 11\xi_3 & + & 4\xi_4 & & & = & 1 \\ -\xi_1 & + & 2\xi_2 & - & 3\xi_3 & & & & & = & 1 \\ 3\xi_1 & + & 8\xi_2 & + & 11\xi_3 & + & \xi_4 & + & 2\xi_5 & = & 3. \end{array}$$

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} (\lambda+1)\,\xi_1 & + & (-\lambda^2+4\,\lambda-4)\,\xi_2 & + & (\lambda-3)\,\xi_3 & = & 1 \\ (\lambda^2-\lambda-2)\,\xi_1 & + & (\lambda^2-4\,\lambda+4)\,\xi_2 & + & 2\,\xi_3 & = & \lambda-2 \\ (\lambda+1)\,\xi_1 & + & (-\lambda^2+4\,\lambda-4)\,\xi_2 & + & (\lambda+1)\,\xi_3 & = & 1. \end{array}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien K ein Körper, $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ eine $(m \times n)$-Matrix und $B \in \mathrm{M}_n(K)$ eine $(n \times n)$-Matrix.

a) Es sei $B \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass der Rang von $A \cdot B$ gleich dem Rang von A ist.

b) Es sei nun B nicht notwendigerweise regulär. Geben Sie in Abhängigkeit von $\mathrm{rg}(A)$ und $\mathrm{rg}(B)$ den maximal bzw. minimal möglichen Rang von $A \cdot B$ an.

c) Unter welcher Bedingung gibt es eine Matrix $C \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$, so dass $A \cdot C = E_m$ ist, wobei E_m die $(m \times m)$-Einheitsmatrix bezeichnet?

d) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine solche Matrix C.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Henry und Martha laufen auf einer Rolltreppe nach oben. Henry läuft doppelt so schnell wie Martha. Bis er oben angekommen ist, hat er 28 Stufen betreten, Martha hat 21 Stufen betreten. Wieviele Stufen der Rolltreppe sind zu sehen?