HU Berlin Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 05.07.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 11 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ die Ebenen

$$E_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 1-\xi_1-\xi_2 \end{pmatrix}_{\text{aff}} \,\middle|\, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}, \text{ bzw. } \quad E_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ -\mu_1-\mu_2 \end{pmatrix}_{\text{aff}} \,\middle|\, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es sei weiterhin $f : E_1 \longrightarrow E_2$ die Zentralprojektion mit Zentrum $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\text{aff}}$, d.h. für $P_1 \in E_1$ ist $f(P_1)$ der Schnittpunkt der Geraden $\mathbb{A}(P, P_1)$ mit E_2.

(a) Zeigen Sie, dass f eine affine Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der (geordneten) affinen Basen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{aff}}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{aff}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{aff}} \right\} \text{von } E_1, \text{ bzw.} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\text{aff}}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\text{aff}}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{aff}} \right\} \text{von } E_2.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $\mathbb{A}(V)$ ein affiner Raum über K. Beweisen Sie:

(a) Die Menge der Translationen $\mathrm{T}(V)$ bildet eine Untergruppe von $\mathrm{GA}(V)$. Weiter gilt

$$\mathrm{T}(V) = \{ f \in \mathrm{GA}(V) \mid \vec{f} = \mathrm{id}_V \}.$$

(b) Die Menge der Dilatationen D(V) bildet eine Untergruppe von $\mathrm{GA}(V)$, welche die Translationen $\mathrm{T}(V)$ als Untergruppe enthält.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es soll der Satz von Pappos bewiesen werden: Es seien $\mathbb{A}(W_1), \mathbb{A}(W_2) \subseteq \mathbb{A}^2(K)$ zwei verschiedene Geraden. Weiter seien sechs verschiedene Punkte A_j, B_j, C_j auf den Geraden $\mathbb{A}(W_j)$ $(j = 1, 2)$ gegeben, so dass die Durchschnitte

$$A = \mathbb{A}(B_1, C_2) \cap \mathbb{A}(B_2, C_1),\ B = \mathbb{A}(A_1, C_2) \cap \mathbb{A}(A_2, C_1),\ C = \mathbb{A}(A_1, B_2) \cap \mathbb{A}(A_2, B_1)$$

Punkte sind. Zeigen Sie, dass A, B, C auf einer Geraden liegen. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Betrachten Sie zuerst den Fall $\mathbb{A}(W_1) \parallel \mathbb{A}(W_2)$. Führen Sie diesen mittels einer geeigneten affinen Abbildung auf den Fall

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{aff}},\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{aff}},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{aff}}$$

zurück und beweisen Sie den Satz unter diesen Bedingungen durch Nachrechnen. Folgern Sie nun den allgemeinen Fall.

(b) Betrachten Sie nun den Fall $\mathbb{A}(W_1) \cap \mathbb{A}(W_2) = \{P\}$. Führen Sie diesen mittels einer geeigneten affinen Abbildung auf den Fall

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{aff}},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{aff}},\ C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{aff}}$$

zurück und verfahren Sie weiter wie in (a).