HU Berlin Sommersemester 2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 28.06.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 11 – Probeklausur (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Für welche Werte von $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

reell diagonalisierbar?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ eine Matrix mit n paarweise verschiedenen reellen Eigenwerten und $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ eine Matrix mit $AB = BA$. Dann ist B diagonalisierbar.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S derart, dass $S^t AS$ Diagonalform besitzt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Menge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 49\xi_1^2 - 30\sqrt{3}\,\xi_1\xi_2 + 19\xi_2^2 = 64 \right\}$$

beschreibt eine Ellipse im $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie den Winkel zwischen der ξ_2-Achse und der durch die kleine Halbachse der Ellipse definierten Geraden.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Es sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $P : V \longrightarrow V$ heißt *Projektion*, falls $P^2 = P$. Sei eine solche Projektion P gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von P entweder 0 oder 1 sind.

(b) Zeigen Sie, dass

$$V = \operatorname{im}(P) \oplus \ker(P)$$

gilt.