

# Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 24.01.2011 in der Vorlesung

## Serie 11 (40 + 10 Punkte)

### Aufgabe 1 (10 Punkte) (Stereographische Projektion)

Sei  $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  die Sphäre im  $\mathbb{R}^3$ . Wir identifizieren  $\mathbb{C}$  mit der Ebene  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ . Zeigen Sie:

- (i) Für jedes  $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  existiert genau ein  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z = x + iy$ , so dass die Punkte  $(0, 0, 1)$ ,  $(x_1, x_2, x_3)$  und  $(x, y, 0)$  auf einer Geraden liegen. Berechnen Sie  $x$  und  $y$  in Abhängigkeit von  $x_1, x_2$  und  $x_3$ .
- (ii) Die Abbildung

$$S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

definiert durch  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto z$  wie in Teil (i), ist sogar bijektiv. Geben Sie ihre Umkehrabbildung explizit an.

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$  holomorphe Funktionen. Zeigen Sie:

- (i) Das Produkt  $f \cdot g$  ist holomorph auf  $D$  und besitzt dort die komplexe Ableitung  $f' \cdot g + f \cdot g'$ .
- (ii) Der Quotient  $1/f$  ist holomorph auf  $D' := \{z \in D \mid f(z) \neq 0\}$  und besitzt dort die komplexe Ableitung  $-f'/f^2$ .

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bestimmen Sie das jeweilige maximale Holomorphiegebiet  $D \subseteq \mathbb{C}$  für die folgenden komplexwertigen Funktionen und berechnen Sie dazu jeweils die entsprechende komplexe Ableitung:

- (i)  $f(z) = z^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),
- (ii)  $f(z) = \exp(z)$ ,
- (iii)  $f(z) = \tanh(z)$ ,
- (iv)  $f(z) = \sin(\exp(1/z))$ .

#### Aufgabe 4 (10 Punkte)

Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie:

- (i) Falls  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  gilt, dann ist  $f$  konstant.
- (ii) Falls der Realteil  $u := \operatorname{Re}(f)$  und der Imaginärteil  $v := \operatorname{Im}(f)$  von  $f$  zweimal stetig differenzierbar sind, dann ist  $u$  eine harmonische Funktion auf  $D$ , d.h. es gilt  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x, y) = 0$  für alle  $z = x + iy \in D$ .

#### Aufgabe 5\* (10 Punkte)

Seien  $\{R_n\}_{n=0}^\infty$  kommutative Ringe und  $\varphi_n : R_n \longrightarrow R_{n-1}$  Epimorphismen ( $n = 1, 2, \dots$ ). Der *projektive Limes*  $R = \varprojlim_n R_n$  des sogenannten projektiven Systems  $\{R_n, \varphi_n\}$  ist dann definiert durch

$$\varprojlim_n R_n := \{(\dots, r_2, r_1, r_0) \mid r_{n-1} = \varphi_n(r_n) \ (n = 1, 2, \dots)\} \subseteq \prod_{n=0}^\infty R_n.$$

Zeigen Sie:

- (i)  $R$  ist ein Ring bezüglich komponentenweiser Addition und Multiplikation, und es existieren natürliche Homomorphismen  $\pi_n : R \longrightarrow R_n$  mit  $\pi_{n-1} = \varphi_n \circ \pi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).
- (ii) Sind  $R'$  ein weiterer Ring und  $\psi_n : R' \longrightarrow R_n$  Homomorphismen mit  $\psi_{n-1} = \varphi_n \circ \psi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), so existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus  $\psi : R' \longrightarrow R$ , der  $\psi_n = \pi_n \circ \psi$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) erfüllt. Diese Eigenschaft bestimmt  $R$  bis auf Isomorphie eindeutig.
- (iii) Im Spezialfall  $R_n = \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$  ( $p$  Primzahl) mit den kanonischen Projektionen  $\varphi_n$  werden die Elemente des projektiven Limes

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$$

ganze  $p$ -adische Zahlen genannt. Zeigen Sie, dass mit der Restklassenabbildung  $\psi_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$  die durch Teil (ii) gegebene Abbildung  $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$  injektiv, aber nicht surjektiv ist. Desweiteren ist  $\mathbb{Z}_p$  ein Integritätsbereich. Sein Quotientenkörper  $\mathbb{Q}_p := \operatorname{Quot}(\mathbb{Z}_p)$  heißt *Körper der  $p$ -adischen Zahlen*.