Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 27.06.2011 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 11 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1 und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, so dass $\mathfrak{a}$ eine Einheit von R enthält. Zeigen Sie, dass dann $\mathfrak{a} = R$ gilt.

(b) Finden Sie ein Ideal von $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$, welches kein Hauptideal ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Finden Sie einen geeigneten Ringhomomorphismus $f : (\mathbb{Z}[X], +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, \cdot)$, so dass sich unter Anwendung des Isomorphiesatzes für Ringe für $a \in \mathbb{Z}$ ein Ringisomorphismus

$$(\mathbb{Z}[X]/(X - a), \oplus, \odot) \cong (\mathbb{Z}, +, \cdot)$$

ergibt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie für Elemente $a, b, c, d \in K$ die folgenden Rechenregeln:

(i) Falls $b, c \neq 0$ sind, gilt:
$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}.$$

(ii) Falls $b, d \neq 0$ sind, gilt:
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}.$$

(iii) Falls $b, d \neq 0$ sind, gilt:
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Führen Sie den Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (a, b) von a, b in den beiden folgenden Fällen durch:

(a) $a = 123.456.789$, $b = 555.555.555$ im Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(b) $a = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$, $b = X^3 + X^2 - X - 1$ im Polynomring $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Es seien R ein kommutativer Ring mit Einselement und $\mathfrak{a} \subsetneq R$ ein echtes Ideal. Das Ideal $\mathfrak{a}$ heißt *Primideal*, wenn für alle $r, s \in R$ aus $r \cdot s \in \mathfrak{a}$ stets $r \in \mathfrak{a}$ oder $s \in \mathfrak{a}$ folgt. Das Ideal $\mathfrak{a}$ heißt *maximal*, wenn R das einzige Ideal ist, das $\mathfrak{a}$ echt umfasst. Zeigen Sie:

(a) $R/\mathfrak{a}$ ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist.

(b) $R/\mathfrak{a}$ ist genau dann ein Körper, wenn $\mathfrak{a}$ maximal ist.

(c) Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.

(d) R ist genau dann ein Körper, wenn (0) das einzige maximale Ideal ist.