HU Berlin Wintersemester 2009/10

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 18.01.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 12 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Betrachten Sie eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Besitzt die Matrix A mindestens eine Nullzeile oder mindestens eine Nullspalte, dann ist A nicht invertierbar.

(b) Ist die Matrix A *nilpotent*, d.h. die Matrix A besitzt die Eigenschaft $A^r = 0$ für ein $r \in \mathbb{N}, r > 0$, so ist die Matrix

$$E + A$$

invertierbar. Hierbei bezeichne $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ die Einheitsmatrix.

Hinweis: Dies sind Verallgemeinerungen von Serie 11, Aufgaben 2(d) und 3(b).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\mathfrak{B}$ sowie der Basis

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und den $\mathbb{R}$-Vektorraum $W = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\mathfrak{C}$ sowie der Basis

$$\mathfrak{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Geben Sie die Basistransformationsmatrizen S bzw. T für den Basiswechsel von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}'$ bzw. von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{C}'$ an.

b) Geben Sie die Basistransformationsmatrix für den Basiswechsel von $\mathfrak{C}'$ nach $\mathfrak{C}$ an.

c) Die lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ sei bezüglich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie mittels der Basistransformationsformel die Matrix von f bezüglich der Basen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Gegeben sei die folgende Zuordnung zwischen den Buchstaben des Alphabets und den ganzen Zahlen $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\dots & \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \dots & \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
\dots & \text{-2} & \text{-1} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & \dots
\end{array}$$

Mit Hilfe der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

wird eine in Dreierblöcke aufgeteilte Nachricht wie folgt verschlüsselt: Zunächst werden die Buchstaben mit Hilfe obiger Zuordnung in Zahlen verwandelt, die Dreierblöcke als Vektoren $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ aufgefasst und mit der Matrix A multipliziert. Die Einträge der Vektoren $A \cdot X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ werden nun wieder mit Hilfe obiger Zuordnung in Buchstaben verwandelt. Wir erhalten die Nachricht

AMDQFOEILISY

Wie lautet der ursprüngliche Text?

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem (S), gegeben durch $A \cdot x = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & -9 & 4 \\ 2 & -9 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie:

(a) Eine Basis für die Lösungen des (S) zugeordneten homogenen Systems (S_0).

(b) Eine spezielle Lösung von (S).

(c) Alle Lösungen von (S).

Aufgabe 5* (10 Punkte)
Es seien $v_1, \dots, v_n$ $(n \geq 2)$ Vektoren in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Zeigen Sie: Die $(n-1)$ Vektoren $v_1 - v_n, \dots, v_{n-1} - v_n$ sind linear unabhängig genau dann, wenn die $(n-1)$ Vektoren $v_2 - v_1, \dots, v_n - v_1$ linear unabhängig sind.