Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 31.01.2010 in der Vorlesung

Serie 12 (40 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien M eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit und $a, b, c \in M$. Weiter bezeichne $W_{a,b}$ die Menge aller Wege in M mit Anfangspunkt a und Endpunkt b. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Homotopie „ $\sim$ “ definiert auf der Menge $W_{a,b}$ eine Äquivalenzrelation.

(ii) Falls γ und δ in $W_{a,b}$ zueinander homotop sind, so sind auch γ^{-1} und δ^{-1} in $W_{b,a}$ zueinander homotop.

(iii) Falls γ_1 und δ_1 in $W_{a,b}$ sowie γ_2 und δ_2 in $W_{b,c}$ zueinander homotop sind, so sind auch $\gamma_1\gamma_2$ und $\delta_1\delta_2$ in $W_{a,c}$ zueinander homotop.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien M eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit und $a, b \in M$.

(i) Zeigen Sie, dass die Menge der Homotopieklassen $\pi_1(M, a) := W_{a,a}/\sim$ geschlossener Wege mit Anfangs- und Endpunkt a (vgl. Aufgabe 1) zu einer Gruppe gemacht werden kann. Die Gruppe $\pi_1(M, a)$ heißt die *Fundamentalgruppe von M bezüglich des Basispunktes a.*

(ii) Zeigen Sie, dass $\pi_1(M, a)$ isomorph zu $\pi_1(M, b)$ ist.

(iii) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(M, a)$ des Kreises $M = S^1$ und der Sphäre $M = S^2$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigl(-1/2(x+i\alpha)^2\bigr)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigl(-x^2/2\bigr)\mathrm{d}x$$

gilt, und folgern Sie daraus

$$\int_{0}^{\infty} \exp\bigl(-x^2/2\bigr)\cos(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\exp\bigl(-\alpha^2/2\bigr).$$

(*Hinweis:* $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigl(-x^2/2\bigr)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$).

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Seien $\gamma, \delta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei differenzierbare Wege definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t) \qquad && (t \in [0,1]), \\ \delta(t) &:= \cos(2\pi t) + 2i\sin(2\pi t) \qquad && (t \in [0,1]). \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes, dass

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\delta \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

gilt, und folgern Sie daraus

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t) + 4\sin^2(t)} = \pi.$$

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von der Form $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0$ heißt *Möbiustransformation.* Finden Sie für drei paarweise verschiedene Zahlen $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Möbiustransformation

$$\varphi_{z_0,z_1,z_2} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

für welche $\varphi_{z_0,z_1,z_2}(z_0) = 0, \varphi_{z_0,z_1,z_2}(z_1) = 1$ und $\varphi_{z_0,z_1,z_2}(z_2) = \infty$ gilt.
(Für eine weitere Zahl $z_3 \in \mathbb{C}$ heißt $w(z_0, z_1, z_2, z_3) := \varphi_{z_0,z_1,z_2}(z_3)$ das *Doppelverhältnis von z_0, z_1, z_2 und z_3*).