

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 20.01.2014 in der Vorlesung

Bitte beachten:

JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.

JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 12 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch

$$f \left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_1 + 2\xi_2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist und geben Sie die Umkehrabbildung f^{-1} explizit an.
- (b) Bestimmen Sie die Matrix A von f , die Matrix B von f^{-1} und die Matrix C von $f^{-1} \circ f$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei V_d der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich d mit reellen Koeffizienten. Es bezeichne $p'(X) = \sum_{j=1}^d j\alpha_j X^{j-1}$ die Ableitung des Polynoms $p(X) = \sum_{j=0}^d \alpha_j X^j$.

Die lineare Abbildung $f : V_3 \longrightarrow V_3$ sei durch die Zuordnung

$$f(p(X)) := p(X) - p'(X)$$

gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.
- (b) Es seien $\mathfrak{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ und $\mathfrak{C} = \{1, X - 1, X^2 - X, X^3 - X^2\}$ zwei Basen von V_3 . Geben Sie die Matrix von f bezüglich der Basen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien V und W zwei reelle Vektorräume mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W) < \infty$, sowie $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) Die Abbildung f ist injektiv.
- (ii) Die Abbildung f ist surjektiv.
- (iii) Die Abbildung f ist bijektiv.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat die Matrix

$$A_{\lambda} := \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}$$

den Spaltenrang 3? Welche anderen Spaltenränge können auftreten? Begründen Sie. Berechnen Sie für jeden auftretenden Fall auch den entsprechenden Zeilenrang explizit gemäß der Definition des Zeilenrangs.

Bitte beachten Sie:

Der Anmeldeschluss für die Klausur am 05.02.2014 ist am 22.01.2014!