HU Berlin Sommersemester 2015

Probeklausur zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Serie 12 (Probeklausur)

Aufgabe 1 (15 Punkte)

(a) Formulieren Sie die Peano-Axiome.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe der Peano-Axiome folgende Aussage: Sind $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot b = 1$, dann gilt $a = b = 1$.

(c) Geben Sie die mengentheoretische Konstruktion von $(\mathbb{Z}, +)$ als minimale umfassende Gruppe der kommutativen regulären Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ an. Beweisen Sie dabei, dass die der Konstruktion zugrunde liegende Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

(a) Definieren Sie den Begriff „Primzahl“.

(b) Beweisen Sie, dass eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, genau dann eine Primzahl ist, wenn jede Primzahl $p \leq \sqrt{n}$ die Zahl n nicht teilt.

(c) Nutzen Sie die Beweisidee von Euklid, um zu zeigen, dass es in der Menge

$$3 + 4 \cdot \mathbb{N} := \{3,\ 3+4,\ 3+8, \ldots,\ 3 + 4 \cdot n, \ldots \mid n \in \mathbb{N}\}$$

unendlich viele Primzahlen gibt.

(d) Entscheiden Sie, ob $2^{3^{333\,333}} + 1$ eine Primzahl ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 3 (15 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass in einem Monoid das neutrale Element eindeutig bestimmt ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Halbgruppe an, die kein Monoid ist. Begründen Sie.

(c) Geben Sie zwei Gruppen der Ordnung 4 mit zugehörigen Gruppentafeln an, welche nicht zueinander isomorph sind.

Gibt es weitere Isomorphietypen für Gruppen der Ordnung 4? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Ist die Abbildung $f : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \oplus) \longrightarrow (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \oplus)$, gegeben durch die Zuordnung $m + 4\mathbb{Z} \mapsto m + 5\mathbb{Z}$ ($m \in \mathbb{Z}$), ein Gruppenhomomorphismus?

Aufgabe 4 (15 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $d := (-247, 91)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus'.

(b) Betrachten Sie den Ring $(\mathcal{R}_{247}, \oplus, \odot)$ und bestimmen Sie explizit ein $x \in \mathcal{R}_{247}$, das der Gleichung $91 \odot x = 52$ genügt.

(c) Es seien $a \in \mathbb{N}$, $a > 0$, und $p \in \mathbb{P}$ eine ungerade Primzahl. Beweisen Sie vollständig, dass $2p$ ein Teiler von $a^p - a$ ist.

Aufgabe 5 (15 Punkte)

(a) Definieren Sie die Begriffe „Einheit“ und „Nullteiler“ eines kommutativen Rings $(R, +, \cdot)$ mit Einselement 1. Beweisen Sie, dass die Menge der Einheiten von R und die Menge der Nullteiler von R disjunkt sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Einheiten $R^\times$ eines kommutativen Rings $(R, +, \cdot)$ mit Einselement 1 bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden.

(c) Bestimmen Sie die Gruppe der Einheiten für die Ringe $(\mathcal{R}_n, \oplus, \odot)$, wobei $n = 5, 8, 10, 12$ ist.

Welche dieser Gruppen sind zueinander isomorph? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

(a) Wir betrachten die Menge $M = \{(a_n) \mid (a_n) \text{ ist rationale Cauchyfolge}\}$. Für $(a_n), (b_n) \in M$ definieren wir die Relation

$$(a_n) \sim (b_n) \iff (a_n) - (b_n) \text{ ist eine rationale Nullfolge.}$$

Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

(b) Bestimmen Sie die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{52}{14} \in \mathbb{Q}$.

(c) Beweisen Sie, dass es für zwei beliebige rationale Zahlen a, b mit $a < b$ eine irrationale Zahl γ mit $a < \gamma < b$ gibt.