HU Berlin Wintersemester 2015/16

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 19.01.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 12 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen (dabei sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & -3 \\ 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & (2i+2) \\ 2i & (2i+1) & i \\ i & (i+1) & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2t & t & -1 & 3t \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ t & 1 & -1 & 0 \\ 2t & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei K ein Körper. Wie in der Vorlesung bezeichnen wir die j-te Spalte einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ mit a_j ($j = 1, \ldots, n$), also $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Gegeben sei nun eine Funktion $F : \mathrm{M}_n(K) \longrightarrow K$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(1) F ist alternierend, d.h. falls $a_j = a_k$ ($j, k = 1, \ldots, n; j \neq k$) ist, so gilt

$$F\big((a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots, a_n)\big) = 0.$$

Damit gilt allgemein für beliebige Spalten a_j, a_k ($j, k = 1, \ldots, n; j \neq k$)

$$F\big((a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots, a_n)\big) = -F\big((a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots, a_n)\big).$$

(2) F ist multilinear in den Spalten, d.h. für Spalten a_j, a_j' ($j = 1, \ldots, n$) und $\lambda, \mu \in K$ gilt

$$F\left((a_1, \ldots, \lambda a_j + \mu a_j', \ldots, a_n)\right) = \lambda F\big((a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)\big) + \mu F\left((a_1, \ldots, a_j', \ldots, a_n)\right).$$

(3) F ist normiert, d.h. für die Einheitsmatrix $E_n = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt

$$F(E_n) = 1.$$

Zeigen Sie, dass F dann die Determinante sein muss, d.h. dass $F(A) = \det(A)$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es seien K ein Körper und $A = (\alpha_{k,j}) \in \mathrm{M}_n(K)$. Wir definieren die *Spur* $\mathrm{tr}(A)$ von A durch

$$\mathrm{tr}(A) := \alpha_{1,1} + ... + \alpha_{n,n} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,j} \ .$$

(a) Zeigen Sie für $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ und $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Gleichheiten $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ bzw. $\mathrm{tr}(SAS^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(K)$ gibt, so dass gilt

$$S \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \ (\lambda_1, \lambda_2 \in K).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Determinante und die Spur der linken und rechten Seite der Gleichung.