HU Berlin Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 12.07.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 12 (Probeklausur) (30 Punkte)
Bitte geben Sie diese Serie nur ab, wenn Sie noch nicht 60% der Punkte aus den Serien 1 bis 11 erreicht haben. Nur dann wird Ihre Abgabe korrigiert und die Punkte werden als Zusatzpunkte gezählt.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Es seien $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome von A und $S^{-1}AS$ die Gleichheit $p_A(t) = p_{S^{-1}AS}(t)$ besteht.

(b) Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$
mit dem charakteristischen Polynom $p_A(t) = -t^3 - 3t^2 + 4$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sowie Basen der zugehörigen Eigenräume. Bestimmen Sie $S, S^{-1} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{F}_2$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Für $A, B \in V$ sei gemäß $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t \cdot B)$ ein Skalarprodukt definiert.

(a) Berechnen Sie die Gramsche Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der geordneten Basis
$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Unterraum $U \subset V$, der durch die beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird.

Erinnerung: Die Spur $\operatorname{tr}(A)$ einer Matrix $A = (\alpha_{j,k})_{j,k=1,\ldots,n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ist durch die Summe der Diagonaleinträge von A gegeben, d. h. $\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,j}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

(a) Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Wann heißt eine Abbildung $f \in \mathrm{L}(V)$ selbstadjungiert? Was kann man im Falle der Selbstadjungiertheit über eine zu f gehörige Matrix und deren Diagonalisierbarkeit sagen?

(b) Es sei $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 und

$$\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(X)q(X)\mathrm{d}X$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$, gegeben durch

$$f\left(p(X)\right) = \left(X^2 - \frac{1}{3}\right) p''(X),$$

bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ selbstadjungiert ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Hauptsatz der affinen Geometrie.

(b) Gegeben sei die affine Abbildung $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ mit

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\text{aff}} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}_{\text{aff}}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{\text{aff}} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}_{\text{aff}}, \quad f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{\text{aff}} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{\text{aff}}.$$

Bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der geordneten affinen Basis

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_{\text{aff}}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{\text{aff}}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{\text{aff}}\right\}.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die durch $f(A) = A^t$ gegebene lineare Abbildung $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisierbar ist.
Hinweis: Eine Matrix B heißt *antisymmetrisch*, wenn $B^t = -B$ gilt. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix darstellbar ist.