Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 25.01.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:

JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.

JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 13 (Probeklausur)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} \mu & \nu & \nu \\ \mu & \mu & \nu \\ \mu & \mu & \mu \end{pmatrix}$$

eine reelle Matrix. Für welche $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar? Geben Sie in den betreffenden Fällen auch die Matrix A^{-1} an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Betrachten Sie einen $\mathbb{R}$ -Vektorraum V .

- (a) Definieren Sie den Begriff eines linearen Unterraumes von V .
- (b) Sei $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$U := \{v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v\} \subseteq V$$

ein linearer Unterraum von V ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, gegeben durch

$$f \left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 + 2\xi_4 \\ -2\xi_3 + 4\xi_4 \\ 4\xi_1 - 2\xi_2 - 2\xi_3 \\ 2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie eine Basis $\mathcal{B}_1$ von $\text{im}(f)$ und eine Basis $\mathcal{B}_2$ von $\text{ker}(f)$.
- (b) Zeigen Sie, dass $\text{im}(f) = \text{ker}(f)$ gilt.
- (c) Überprüfen Sie, dass $f \circ f = 0$ gilt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Seien V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängige Vektoren. Sei weiter

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \in V \quad (\alpha_j \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie: Genau dann sind $v_1 - v, \dots, v_n - v$ linear abhängig, wenn $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ gilt.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Es sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Dann gilt die Äquivalenz der drei folgenden Aussagen:

- (i) $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ ist eine Basis von V .
- (ii) $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V .
- (iii) $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V .

Beweisen Sie drei Implikationen Ihrer Wahl.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Betrachten Sie mit

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -10 & 3 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R}), \quad x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

das homogene lineare Gleichungssystem (S_0) gegeben durch $A \cdot x = 0$. Bestimmen Sie:

- (a) Die Dimension des Lösungsraumes von (S_0) durch Berechnung des Rangs von A .
- (b) Eine Basis des Lösungsraumes von (S_0) .

Hinweis: Zeitrahmen unter Klausurbedingungen: 120 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel: ein beidseitig handbeschriebenes DinA4-Blatt.