

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 07.02.2010 in der Vorlesung

Serie 13 (40 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden komplexen Wegintegrale mit Hilfe der (verallgemeinerten) Cauchy'schen Integralformel:

(i) $\int_{\gamma} \frac{\exp(z)}{z} dz$ für $\gamma(t) := \exp(2\pi it)$ ($t \in [0, 1]$),

(ii) $\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{z^2 - 1} dz$ für $\gamma(t) := 3 \exp(2\pi it)$ ($t \in [0, 1]$),

(iii) $\int_{\gamma} \frac{z^3}{(z - i)^3} dz$ für $\gamma(t) := i + \exp(2\pi it)$ ($t \in [0, 1]$).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $|f(z) - 1| < 1$ für alle $z \in D$. Weiter sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ ein geschlossener, differenzierbarer Weg. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

gilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(i) Sei $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass eine Funktion $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass die Funktion $f = u + iv$ holomorph auf $\mathbb{C}$ ist.

(ii) Sei $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 u(\exp(2\pi it)) dt$$

gilt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Seien $U_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : U_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq |z|$. Weiter seien 0 und $0 \neq b \in U_1(0)$ zwei Fixpunkte von f , d.h. es gilt $f(0) = 0$ und $f(b) = b$. Zeigen Sie, dass dann $f(z) = z$ für alle $z \in U_1(0)$ gilt.

(*Hinweis*: Maximumsprinzip).

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Für eine komplexe Zahl $s \in \mathbb{C}$ und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $n^s := \exp(s \log(n))$. Zeigen Sie:

- (i) Die Reihe $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert absolut und gleichmäßig für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ (*Riemannsche Zetafunktion*).
- (ii) Die Reihe $\sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} |\omega|^{-s}$ mit $L := \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ konvergiert absolut und gleichmäßig für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 2$.